Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

2. Übung zu Algebra I, WS 98/99

Aufgabe 1: (*6 Punkte*)
Sei G eine Gruppe mit Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$. Sei U eine Teilmenge von G.

a) Zeige, daß die Einschränkung von $\circ$ auf $U \times U$ genau dann eine Gruppenstruktur auf U definiert, wenn U nicht leer ist und $x \circ y^{-1} \in U$ gilt für alle $x, y \in U$.

b) Sei U nun eine endliche nichtleere Teilmenge von G. Zeige, daß U genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn $UU := \{x \circ y | x, y \in U\} \subseteq U$ gilt. Zeige, daß dabei die Bedingung der Endlichkeit von U notwendig ist.

Aufgabe 2: (*4 Punkte*)
Sei G eine Gruppe mit Primzahlordnung. Zeige, daß G zyklisch ist und keine Untergruppen außer $\{1_G\}$ und G besitzt.

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)
Sei G eine abelsche Gruppe und $N \in \mathbb{N}$. Zeige, daß $U_1 = \{x \in G | x^N = 1_G\}$ und $U_2 = \{x^N | x \in G\}$ Untergruppen von G sind. Zeige, daß dabei die Voraussetzung der Kommutativität von G notwendig ist.

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)
Sei G eine Gruppe. Zeige, daß eine Untergruppe U von $\mathrm{Z}(G)$ normal ist in G. Zeige, daß eine Untergruppe U von G mit $[G : U] = 2$ normal ist in G.

Abgabe am 2.11.1998 vor der Vorlesung

Comic der Woche: