Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

3. Übung zu Algebra I, WS 98/99

Aufgabe 1: (*5 Punkte*)
Zeige, daß eine Gruppe mit mehr als zwei Elementen einen nichttrivialen Automorphismus besitzt.

Aufgabe 2: (*4 Punkte*)
Zeige, daß der Index des Zentrums einer Gruppe niemals eine Primzahl sein kann.

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)
Sei p eine Primzahl. Zeige, daß jede Gruppe der Ordnung p^2 abelsch ist. Zeige, daß eine Gruppe der Ordnung p^3 nicht unbedingt abelsch sein muß.

Aufgabe 4: (*6 Punkte*)
Sei G eine endliche abelsche Gruppe und $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ ihre Dualgruppe.

a) Zeige, daß G isomorph ist zu $\hat{G}$.

b) Zeige, daß G kanonisch isomorph ist zu $\hat{\hat{G}}$.

c) Sei $\chi_0 \in \hat{G}$. Zeige

$$\sum_{g \in G} \chi_0(g) = \begin{cases} \#G \text{ falls } \chi_0 \equiv 1 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} .$$

d) Sei $g_0 \in G$. Zeige

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g_0) = \begin{cases} \#G \text{ falls } g_0 = 0 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} .$$

Abgabe am 9.11.1998 vor der Vorlesung

Comic der Woche: