Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

4. Übung zu Algebra I, WS 98/99

Aufgabe 1: (*4 Punkte*)
Sei G eine Gruppe und M eine Menge. Eine Gruppenoperation von G auf M ist eine Abbildung $G \times M \to M$; $g, m \mapsto g \cdot m$ mit den Eigenschaften:
(i) $1_G \cdot m = m \ \forall m \in M$,
(ii) $g \cdot (h \cdot m) = (gh) \cdot m \ \forall g, h \in G, m \in M$.
Die Bahn eines Elementes $m \in M$ ist dann definiert als $G \cdot m := \{g \cdot m | g \in G\}$, die Fixgruppe von m ist $G_m := \{g \in G | g \cdot m = m\}$. Ein Fixpunkt der Operation ist ein $m \in M$ mit $g \cdot m = m$ für alle $g \in G$.
Seien nun G und M endlich, G operiere auf M wie oben beschrieben. Zeige:

a) Für alle $m \in M$ gilt $\#G/G_m = \#G \cdot m$.
b) Ist p eine Primzahl, G eine p-Gruppe, so ist die Anzahl der Fixpunkte kongruent zu $\#M$ modulo p. Gilt $p \not| \#M$, so existiert mindestens ein Fixpunkt. (Hinweis: Erstelle ähnlich zur Klassengleichung eine Bahngleichung.)

Aufgabe 2: (*6 Punkte*)
Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $n = r \cdot p^e$, $p \in \mathbb{P}$, $p \not| r$.

a) Zeige, daß G durch Konjugation auf der Menge der p-Sylowgruppen von G operiert. Wieviele verschiedene Bahnen gibt es bezüglich dieser Operation? Zeige, daß die Anzahl der p-Sylowgruppen von G ein Teiler von r ist.
b) Zeige, daß die Anzahl der p-Sylowgruppen kongruent zu 1 modulo p ist. (Hinweis: Betrachte die Operation einer p-Sylowgruppe auf der Menge aller p-Sylowgruppen.)

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)
Zeige, daß jede Gruppe der Ordnung 15 zyklisch ist. (Hinweis: Betrachte eine geeignete Operation der Gruppe auf einer ihrer p-Sylowgruppen.)

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)
Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Zeige die folgenden Aussagen:

a) $U = \{x | x^2 = 1\}$ ist eine Untergruppe von G.
b) $\prod_{g \in G} g = \prod_{g \in U} g = \begin{cases} 1 \text{ falls } \#U \neq 2 \\ x \text{ falls } U = \{1, x\} \text{ mit } x \neq 1 \end{cases}$
(Hinweis: Für das erste Gleichheitszeichen zerlege das Produkt mit Hilfe der Menge U, für das zweite Gleichheitszeichen zerlege das Produkt mittels einer Untergruppe von U.)
c) Für $2 \neq p \in \mathbb{P}$ gilt $(p-1)! + 1 \equiv 0 \bmod p$ (Satz von Wilson).

Abgabe am 16.11.1998 vor der Vorlesung

Comic der Woche: