Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

5. Übung zu Algebra I, WS 98/99

Aufgabe 1: (*3 Punkte*)
Sei R ein Ring mit Eins und mit $x^2 = x$ für alle $x \in R$. Zeige, daß R kommutativ ist.

Aufgabe 2: (*3 Punkte*)
Sei $R = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), a, b \in \mathbb{R}\}$. Zeige, daß R ein Unterring von $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$ ist. Zeige, daß es ein Element $e \in R$ gibt mit $e \cdot x = x$ für alle $x \in R$. Zeige, daß R trotzdem kein Einselement besitzt.

Aufgabe 3: (*2 Punkte*)
Zeige, daß die beiden Unterringe $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ und $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ von $\mathbb{R}$ nicht isomorph sind.

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)
Sei R der Ring der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, versehen mit punktweiser Addition und Multiplikation (d.h. $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$). Zeige, daß $f \in R$ genau dann eine Einheit ist, wenn $f(x) \neq 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige, daß $f \in R$ genau dann ein Nullteiler ist, wenn $f^{-1}(0)$ nichtleeres Inneres hat. Finde ein Element von R, das weder Einheit noch Nullteiler ist.

Aufgabe 5: (*7 Punkte*)
Sei $R = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}\}$ die Menge der Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{C}$. Zeige, daß auf R durch

$$(f+g)(n) := f(n) + g(n) \text{ und } (f * g)(n) = \sum_{\substack{x,y \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ xy=n}} f(x)g(y)$$

eine kommutative Ringstruktur definiert ist. Zeige, daß das Einselement gegeben ist durch δ mit $\delta(1) = 1$, $\delta(n) = 0$ für $n \neq 1$.
Sei μ definiert durch

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 \text{ falls } n = 1 \\ (-1)^r \text{ falls } n = p_1 \dots p_r,\ p_i \in \mathbb{P} \text{ paarweise verschieden} \\ 0 \text{ falls } n \text{ einen quadratischen Faktor besitzt} \end{cases}$$

sowie e durch $e(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige $\mu * e = \delta$. Zeige $F = e * f \Leftrightarrow f = \mu * F$ für alle $f, F \in R$.
Zeige die Möbius-Inversionsformel: Ist $f \in R$ und $F(n) := \sum_{d|n} f(d)$, so gilt $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F(n/d)$.

Abgabe am 23.11.1998 vor der Vorlesung

Comic der Woche: