Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

6. Übung zu Algebra I, WS 98/99

Aufgabe 1: (*3 Punkte*)
Sei R kommutativer Ring mit Eins. Zeige, daß in R Nullteiler nie Einheiten sein können. Seien $a, b \in R$. Zeige, daß ab kein Nullteiler in R ist, wenn a und b keine Nullteiler sind.

Aufgabe 2: (*6 Punkte*)
Gib einen Ringhomomorphismus an, der nicht jeden Nullteiler auf einen Nullteiler abbildet. Zeige, daß ein solcher Ringhomomorphismus notwendigerweise nichtinjektiv ist. Sei $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus zwischen Ringen mit Eins mit $f(1) = 1$. Zeige, daß f Einheiten auf Einheiten abbildet.

Aufgabe 3: (*4 Punkte*)
Sei R Ring mit Eins, $x, y \in R$. x heißt nilpotent, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x^n = 0$. Zeige: Ist $x \in R$ nilpotent, so ist $1 - x$ eine Einheit. Das Element $1 - xy$ ist genau dann eine Einheit, wenn $1 - yx$ Einheit ist.

Aufgabe 4: (*3 Punkte*)
Bestimme die Einheiten von $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$.

Aufgabe 5: (*4 Punkte*)
Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Zeige, daß jedes Element des Rings $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ entweder eine Einheit oder ein Nullteiler ist.

Abgabe am 30.11.1998 vor der Vorlesung

Comic der Woche: