Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

7. Übung zu Algebra I, WS 98/99

Aufgabe 1: (*2 Punkte*)
Finde den ggT von $X^{12} - 1$ und $X^{30} - 1$ in $\mathbb{Z}[X]$.

Aufgabe 2: (*4 Punkte*)
Zeige, daß $I := \{f \in \mathbb{Z}[X] \,|\, f(0) = 0\}$ ein Hauptideal in $\mathbb{Z}[X]$ ist. Ist I ein Primideal? Ist I ein maximales Ideal? Ist $\mathbb{Z}[X]$ Hauptidealring?

Aufgabe 3: (*4 Punkte*)
Sei R ein kommutativer Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal. Zeige: $I[X]$ ist genau dann ein Primideal von $R[X]$, wenn I ein Primideal von R ist.

Aufgabe 4: (*3 Punkte*)
Sei R kommutativer Ring mit Eins. Zeige: Ist jedes von R verschiedene Hauptideal in R ein Primideal, so ist R ein Körper.

Aufgabe 5: (*7 Punkte*)
Sei K ein Körper. Eine nichtarchimedische Bewertung von K ist eine Abbildung $v : K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit den Eigenschaften

i) $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$,
ii) $v(xy) = v(x) + v(y)$,
iii) $v(x + y) \geqslant \min\{v(x), v(y)\}$,

wobei für $a \in \mathbb{R}$ und ∞ die Konventionen $a < \infty$, $a + \infty = \infty + a = \infty + \infty = \infty$ gelten. Sei $O_v := \{x \in K \,|\, v(x) \geqslant 0\}$ und $\mathfrak{m}_v := \{x \in K \,|\, v(x) > 0\}$. O_v heißt der Bewertungsring von v.

a) Zeige, daß O_v ein Unterring von K ist mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_v$ und Einheitengruppe $O_v^* = \{x \in K \,|\, v(x) = 0\}$.
b) Zeige, daß O_v ein Hauptidealring ist, falls $v(K^*) = \mathbb{Z}$ ist.
c) Sei $v(K^*) = \mathbb{Q}$. Zeige, daß O_v dann keine irreduziblen Elemente enthält. Zeige, daß es in O_v eine unendliche Folge von echt aufsteigenden Idealen $\mathfrak{a}_1 \subsetneq \mathfrak{a}_2 \subsetneq \mathfrak{a}_3 \subsetneq \ldots$ gibt.

Abgabe am 7.12.1998 vor der Vorlesung

Comic der Woche: