Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

8. Übung zu Algebra I, WS 98/99

Aufgabe 1: (*3 Punkte*)
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeige, daß jedes Primideal, dessen Index in der additiven Gruppe $(R, +)$ endlich ist, sogar ein maximales Ideal ist.

Aufgabe 2: (*3 Punkte*)
Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in R, dessen Index in $(R, +)$ eine Primzahl ist. Muß $\mathfrak{a}$ dann ein Primideal sein?

Aufgabe 3: (*4 Punkte*)
Sei R kommutativer Ring mit Eins, $f \in R[X]$ vom Grad d. Sei $h \in R$. Zeige, daß es Polynome $\varphi_i(X) \in R[X]$ gibt mit $f(X+h) = f(X) + \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(X)h^i$.

Aufgabe 4: (*3 Punkte*)
Zeige, daß es kein Polynom $f \in \mathbb{Z}[X]$ gibt mit $f(n) \in \mathbb{P}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5: (*7 Punkte*)
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Analog zur Konstruktion des Polynomrings $R[X]$ in der Vorlesung konstruiert man den Ring $R[[X]]$ der formalen Potenzreihen in X wie folgt: die Elemente von $R[[X]]$ sind Folgen $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ von Elementen aus R, Addition und Multiplikation sind definiert durch $(a_0, a_1, a_2, \ldots) + (b_0, b_1, b_2, \ldots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$, $(a_0, a_1, a_2, \ldots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \ldots) = (c_0, c_1, c_2, \ldots)$ mit $c_k = \sum_{n+m=k} a_n \cdot b_m$. Zur Veranschaulichung schreibt man $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ für die Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Dann sind die Rechenregeln für Potenzreihen analog zum Rechnen mit Polynomen, nur daß eine Potenzreihe unendlich viele von 0 verschiedene Koeffizienten haben kann.

a) Bestimme die Einheiten von $R[[X]]$.
b) Sei $R = K$ ein Körper. Zeige, daß $K[[X]]$ genau die Ideale (0), (X^n), $n \geqslant 0$ hat. Ist $K[[X]]$ ein ZPE-Ring?

Abgabe am 14.12.1998 vor der Vorlesung

Comic der Woche: