Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

9. Übung zu Algebra I, WS 98/99

Aufgabe 1: (*3 Punkte*)
Sei $m/n \in \mathbb{Q}$ ein gekürzter Bruch, der Nullstelle von $a_0 + a_1X + \ldots + a_kX^k \in \mathbb{Z}[X]$ ist. Zeige, daß $m|a_0$ und $n|a_k$ gilt. Hat $7 - X^7 + X^{47}$ eine Nullstelle in $\mathbb{Z}$, in $\mathbb{Q}$, in $\mathbb{R}$?

Aufgabe 2: (*7 Punkte*)

a) Sei K ein Körper, $f(X) \in K[X]$ ein Polynom und $c \in K$. Zeige, daß $f(X)$ genau dann irreduzibel ist, wenn $f(X+c)$ irreduzibel ist.

b) Sei R ein ZPE-Ring mit Quotientenkörper K, $f(X) \in R[X]$ sowie p ein irreduzibles Element von R und $\overline{f}(X) \in (R/(p))[X]$ das Polynom, das man aus f erhält, indem man die Koeffizienten durch ihre Restklassen in $R/(p)$ ersetzt. Zeige, daß $f(X)$ irreduzibel ist in $K[X]$, falls $\overline{f}(X)$ irreduzibel ist in $(R/(p))[X]$ und den selben Grad hat wie $f(X)$.

c) Sei R ein ZPE-Ring mit Quotientenkörper K. Sei $f(X) = \sum_{n=0}^{d} a_nX^n \in R[X]$ ein Polynom vom Grad $d > 0$ und $p \in D$ mit $p|a_n$ für alle $n = 0, 1, \ldots, d-1$ und mit $p \nmid a_d$, $p^2 \nmid a_0$. Zeige, daß f dann irreduzibel ist in $K[X]$.

Aufgabe 3: (*4 Punkte*) Welche der folgenden Polynome sind irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$?
a) $X^3 - 7X^2 + 3X + 3$ b) $X^8 + 1$ c) $X^8 + X^6 + X^4 + X^2 + 1$
d) $X^3 + 3X - 2$ e) $X^4 + 15X^3 + 7$

Aufgabe 4: (*6 Punkte*)
Sei K ein Körper, $f(X) \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $d > 0$ mit Nullstellen $a_1, \ldots, a_d$. Die Diskriminante von f ist definiert als $D(f) := \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant d}(a_i - a_j)^2$. Zeige $D(X^2 + aX + b) = a^2 - 4b$ und $D(X^3 + aX^2 + bX + c) = a^2b^2 - 4b^3 - 4a^3c - 27c^2 + 18abc$. (Hinweis: Die Diskriminante ist symmetrisch in den Nullstellen, läßt sich also mittels elementarsymmetrischer Polynome ausdrücken. Diese stellen den Zusammenhang zwischen den Nullstellen und Koeffizienten eines Polynoms her.)

Abgabe am 21.12.1998 vor der Vorlesung

Comic der Woche: