Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

# 14. Übung zur Linearen Algebra I, WS 1998/99

*(Ferienübungsblatt)*

**Aufgabe 64**: *(0 Punkte)*
Sei $E$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

a) Zeige, daß sich jede Matrix $A$ aus $E$ auf genau eine Weise als Summe einer schiefsymmetrischen und einer symmetrischen Matrix schreiben läßt. ($A$ schiefsymmetrisch $:\Longleftrightarrow A^T = -A$)

b) Zeige, daß die Menge $U := \{A | A \in E \text{ schiefsymmetrisch}\}$ ein Unterraum von $E$ ist. Bestimme das orthogonale Komplement $U^\perp$ von $U$.

**Aufgabe 65**: *(0 Punkte)*
Seien $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{K}$ ein Körper, $\Phi : \mathbf{K}^n \times \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}$ eine Abbildung und $(e_1, \cdots, e_n)$ die Standardbasis von $\mathbf{K}$. Die Matrix $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,\cdots,n\}}$ sei durch $a_{ij} := \Phi(e_i, e_j)$ definiert. Zeige

a) Ist $\Phi$ bilinear, so gilt $\Phi(x, y) = xAy^T$ für alle $x, y \in \mathbf{K}^n$.

b) Sind $B \in M_{n,n}(\mathbf{K})$ und $\Phi(x, y) = xBy^T$ für alle $x, y \in \mathbf{K}^n$, so ist $\Phi$ bilinear. Folgt dann auch $A = B$?

c) Falls $\Phi$ bilinear ist, gilt: $\Phi$ symmetrisch $\Longleftrightarrow$ $A$ symmetrisch!

**Aufgabe 66**: *(0 Punkte)*
Seien $E$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ und

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_2.$$

a) Zeige, daß $(E, \Phi)$ ein euklidischer Raum ist.

b) Das in a) definierte Skalarprodukt von $E$ läßt sich auf den Dualraum $E^*$ übertragen. Bestimme eine Orthonormalbasis von $(E^*, \Phi)$.

**Aufgabe 67**: *(0 Punkte)*
Seien $(E, \Phi)$ wie in der vorherigen Aufgabe und die Funktion $\Delta : E \times E \to \mathbb{R} : (x, y) \to xAy^T$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Zeige, daß $\Delta$ eine normierte Determinantenfunktion ist.

b) Bestimme die Orientierungen folgender Basen von $E$ bezüglich $\Delta$: $\{(1, 0), (0, 1)\}$ und $\{(3, 1), (2, 0)\}$.

**Aufgabe 68**: *(0 Punkte)*
Seien die Vektoren $a_1 = (1, -1, -1, 1), a_2 = (-2, 0, 2, 1)$ und $a_3 = (1, -3, -1, 4)$ im $\mathbb{R}^4$ gegebenen, der mit dem Standardskalarprodukt versehen ist.

a) Bestimme die Beträge der $a_i$ und die zugehörigen Einheitsvektoren, sowie den Winkel zwischen $a_1$ und $a_2$.

b) Orthonomiere $a_1, a_2, a_3$ nach dem Schmidtschen Verfahren.

***Die Aufgaben werden nächstes Semester besprochen! Eine Abgabe ist nicht erforderlich! Das Ergebnis der Klausur wird spätestens am Mittwoch, 24.2.1999 aushängen. Die Klausureinsicht wird vermutlich am selben Tag um 14 Uhr sein.***