Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

1. Übung zur Linearen Algebra II, SS 1999

Aufgabe 1: *(10 Punkte)*
In (11.2.3) nutzte man die Selbstdualität einer Orthonomalbasis aus, um eine wichtige Eigenschaft der adjungierten Abbildung zu beweisen. Dies kann man aber auch direkt tun: Seien E und F euklidische Vektorräume mit Orthonormalbasen $\mathfrak{e}$ bzw. $\mathfrak{f}$. Sei $\varphi : E \to F$ ein Homomorphismus und $\tilde{\varphi} : F \to E$ die adjungierte Abbildung. Rechne direkt nach, daß

$$M(\tilde{\varphi}, \mathfrak{f}, \mathfrak{e}) = M(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{f})^T$$

gilt.

Aufgabe 2: *(5+2+1+2=10 Punkte)*
Auf dem euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt sei die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis $a_1 = (1,0,0)$, $a_2 = (0,1,1)$, $a_3 = (1,0,1)$ durch $\varphi(a_1) = a_1$, $\varphi(a_2) = 2a_1 + 2a_2 + a_3$, $\varphi(a_3) = 2a_1 + 3a_3$ gegeben.

a) Bestimme die zu φ adjungierte Abbildung $\tilde{\varphi}$.

   Hinweis: *Beachte die vorherige Aufgabe und schreibe $\tilde{\varphi}$ als Matrix bezüglich der Standardbasis.*

b) Ist φ normal?

c) Ist φ selbstadjungiert?

d) Bestimme (falls möglich) eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, welche aus Eigenvektoren von φ besteht.

Aufgabe 3: *(5+5=10 Punkte)*

a) In der Vorlesung (10.13.2) wurde behauptet, daß das Kreuzprodukt linear und alternierend sei. Zeige dies!

b) Auf dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und der Standardbasis e_1, e_2, e_3 sei die Orientierung durch die Determinantenfunktion Δ vermittels $\Delta(e_1, e_2, e_3) = 1$ festgelegt.

   (i) Beweise mit Hilfe des Kreuzproduktes, daß $x = (1,2,3)$ und $y = (0,1,1)$ linear abhängig sind. Bestimme außerdem $z \in \mathbb{R}^3$ dergestalt, daß $[x, y, z]$ eine positiv orientierte Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

   (ii) Bestimme das Volumen des von $x = (1,4,2)$, $y = (2,1,0)$ und $z = (3,2,0)$ aufgespannten Parallelepipeds.

Aufgabe 4: *(10 Punkte)*
Sei E ein euklidischer Vektorraum der Dimension n und Δ eine normierte Determinantenfunktion auf E. Dann gilt nach Satz (10.11.3)

$$\Delta(x_1, \cdots, x_n) \cdot \Delta(y_1, \cdots, y_n) = \det \begin{pmatrix} \langle x_1, y_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, y_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_n, y_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, y_n \rangle \end{pmatrix}$$

Zeige dies unmittelbar unter Benutzung der Identität (8.4.3)(4)!

Informationen zur Vorlesung: *Die Klausur zur Vorlesung findet am Samstag, 10. Juli 1999 von 9-13 Uhr im Hörsaal I statt. Falls nötig wird es eine Nachklausur geben. Zur Klausur wird zugelassen, wer 40% der Punkte aus den Übungen hat und regelmäßig an den Übungen teilnahm (dies bedeutet sowohl Anwesenheit als auch Mitarbeit!). Einen Übungsschein erhält, wer eine Klausur besteht.*
Gelegentlich wird -wenn der Stoff es zuläßt- eine Mapleaufgabe zu bearbeiten sein. Wer hierfür einen Account benötigt, trage sich nächste Woche in die Liste vor Raum 309 ein.
Eine Fragestunde wird es nicht mehr geben, doch besteht jeden Mittwoch um 16 Uhr die Möglichkeit, bei Holger Cröni (Raum 309) vorbeizukommen und Fragen zu stellen. Bei großem Andrang steht der Seminarraum 5 zur Verfügung.