Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

2. Übung zur Linearen Algebra II, SS 1999

Aufgabe 5:*(1+7+3+3=14 Punkte)*
Betrachte den euklidischen Raum $E := \mathbb{R}_3$ mit dem Standardskalarprodukt. Der Endomorphismus φ von E sei bezüglich der Standardbasis $\mathfrak{e}$ durch die Matrix

$$A := M(\varphi, \mathfrak{e}, \mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$$

gegeben.

a) Ist φ selbstadjungiert, schiefsymmetrisch, normal?

b) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von φ. (**Hinweis:** *Ein Eigenwert ist* 3.)

c) Bestimme eine Orthonormalbasis von E, die aus Eigenvektoren von φ besteht.

d) Bestimme eine orthogonale Matrix S und eine Diagonalmatrix D mit $S^T AS = D$.

Aufgabe 6:*(4+2=6 Punkte)*
Sei E ein orientierter euklidischer Vektorraum der Dimension 2 und Δ eine normierte Determinantenfunktion auf E, welche die Orientierung von E definiert. Es bezeichne $\theta(x, y)$ den orientierten Winkel von $x, y \in E$. (vgl. 10.14.2)

a) Zeige

$$\theta(x, -y) = \begin{cases} \theta(x, y) - \pi, & \text{falls } \theta(x, y) > 0 \\ \theta(x, y) + \pi, & \text{falls } \theta(x, y) \leq 0 \end{cases}$$

b) Im mit dem Standardskalarprodukt versehenen euklidisch orientierten Vektorraum $\mathbb{R}^2$ gelte $\Delta((0, 1), (1, 0)) = 1$. Berechne den Winkel zwischen $(1, 1)$ und $(0, 1)$, sowie den orientierten Winkel zwischen $(1, 1)$ und $(0, 1)$.

Aufgabe 7:*(10 Punkte)*
Sei E ein $\mathbf{K}$-Vektorraum und φ ein Endomorphismus von E. Seien $x_1, \cdots, x_r$ Eigenvektoren von φ zum jeweiligen Eigenwert $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$.
Zeige: Dann sind die Eigenvektoren $x_1, \cdots, x_r$ linear unabhängig! (vgl. 11.3.9)

Aufgabe 8:*(1+9=10 Punkte)*
Der schiefsymmetrische Endomorphismus ψ des $\mathbb{R}_3$ sei bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Berechne Spur, Determinante und Rang von ψ.

b) Bringe A auf Normalform für schiefsymmetrische Matrizen und bestimme eine Basis $\mathfrak{b} := \{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}_3$, so daß $M(\psi, \mathfrak{b}, \mathfrak{b})$ diese Normalform hat.
Hinweis: *Benutze das Verfahren des Beweises von 11.6.9.*

Abgabe der Übungen ist am Freitag, 30.4.1999 vor der Vorlesung!