Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

3. Übung zur Linearen Algebra II, SS 1999

Aufgabe 9: *(5+5=10 Punkte)*

a) Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ und bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}_n$. Zeige, daß dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $A^T A = I$

(ii) $A^{-1} = A^T$

(iii) $AA^T = I$

(iv) Die Spaltenvektoren von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}_n$.

(v) Ist $b_1, \cdots, b_n$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}_n$, dann ist es auch $Ab_1, \cdots, Ab_n$.

(vi) $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}_n$.

(vii) $|Ax| = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}_n$.

b) Für $0 \neq a \in \mathbb{R}_n$ definiert man eine Matrix $S_a \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ durch

$$S_a := I - \frac{2}{\langle a, a \rangle} a a^T.$$

(i) Zeige, daß $S_a x = x - 2\frac{\langle a,x \rangle}{\langle a,a \rangle} a$ gilt.

(ii) Zeige, daß $S_a \in O(n)$ gilt. (S_a nennt man eine *Spiegelung*.)

(iii) Zeige, daß die zu a orthogonale Hyperebene $H_a := \{x \in \mathbb{R}_n : \langle a, x \rangle = 0\}$ die Spiegelachse von S_a ist, d.h. daß sich jedes $x \in \mathbb{R}_n$ als $x = \lambda a + h$ mit $h \in H_a$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ schreiben läßt, so daß $S_a x = -x$ gilt.

Zur nächsten Aufgabe: *Wie man weiß, läßt sich jeder Drehung in der Ebene als Hintereinanderausführung von zwei Spiegelungen beschreiben. Die Verallgemeinerung dieses Satzes wurde aber erst 1938 von* Elie Cartan *(1869-1951) bewiesen.*

Aufgabe 10: *(4+6=10 Punkte)*

Seien Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in der vorherigen Aufgabe. Beweise die folgenden beiden Aussagen:

a) Seien $u, v \in \mathbb{R}_n$ verschieden, wobei $|u| = |v|$ gilt. Dann gibt es ein $0 \neq a \in \mathbb{R}_n$ mit $S_a u = v$ und $S_a v = u$.
Hinweis: *Wähle $a = u - v$ und überlege Dir, wie $|u - v|^2$ und $\langle u - v, u \rangle$ zusammenhängen.*

b) Jede Matrix $I \neq A \in O(n)$ ist ein Produkt von höchstens n Spiegelungen!
Hinweis: *Wende Aufgabe 9 a) (iv), Aufgabe 10 a) und Aufgabe 9 a) (v) an. (Wäre der Hinweis weniger kryptisch, stünde der Beweis bereits hier ;-)*

Aufgabe 11: *(5+5=10 Punkte)*
Es seien die reellen Vektorräume $E := M_{2,2}(\mathbb{R})$ und $G := \mathbb{R}^4$, sowie die Abbildungen $\Phi_1, \Phi_2 : E \times G \to \mathbb{R}$ durch

$$\Phi_1\left(\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right), (b_1, \cdots, b_4)\right) = a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{22}b_4,$$
$$\Phi_2\left(\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right), (b_1, \cdots, b_4)\right) = a_{11}b_1 + 2a_{12}b_2 + 2a_{21}b_3 - a_{22}b_4$$

gegeben.

a) Sind (E, G, Φ_1) und (E, G, Φ_2) duale Paare?

b) Sei $E_1 \subset E$ der von $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ erzeugte Untervektorraum. Bestimme das orthogonale Komplement $E_1^{\perp} := \{b \in G | \forall A \in E_1 \; : \; \Phi_2(A, b) = 0\}$ von E_1 bezüglich des dualen Paares (E, G, Φ_2). Was ist $(E_1^{\perp})^{\perp}$?

Zur nächsten Aufgabe: *Die folgende Aufgabe muß mit Maple gelöst werden! Es kann nicht schaden, das Ergebnis per Hand nachzurechnen, doch darf nur eine* ***ausführlich*** *kommentierte (!) Lösung, welche mit Maple erstellt wurde, abgegeben werden.*
Deine Lösung muß bis Freitag 11 Uhr bei Frederic **(fboldt@math.uni-sb.de)** *oder Thorsten* **(thbr@math.uni-sb.de)** *eingetroffen sein.*

Aufgabe 12: (10 Punkte)
Sei der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}_3$ mit dem Standardskalarprodukt und der Standardbasis (e_1, e_2, e_3) versehen. Durch die normierte Determinantenfunktion Δ mit $\Delta(e_1, e_2, e_3) = 1$ sei eine Orientierung vorgegeben. Der Endomorphismus φ sei bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Beweise, daß φ eine eigentliche Drehung ist.

b) Bestimme die Drehachse, den Drehvektor und den orientierten Drehwinkel von φ.

c) Finde eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}_3$, so daß A bezüglich dieser Basis in Normalform vorliegt (vgl. 11.8.4). Was ist diese Normalform?

Zur Infomation: Wer noch einen Rechnerzugang benötigt, kann diesen heute in der Vorlesungspause im Hörsaal I bei Holger Cröni beantragen.

Abgabe der Übungen ist am Freitag, 7.Mai 1999 vor der Vorlesung!