Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

# 4. Übung zur Linearen Algebra II, SS 1999

**Aufgabe 13**:*(6+7=13 Punkte)*
Sei $(E, G, \Phi)$ ein duales Paar und für alle $i \in I$ sei $E_i$ eine Teilmenge von $E$.

a) Beweise die folgenden acht Aussagen:

(i) $E_i^\perp$ ist ein Unterraum von $G$.
(ii) $\langle E_i \rangle^\perp = E_i^\perp$
(iii) $E^\perp = (0)$ und $G^\perp = (0)$
(iv) $E_i \subset E_k \Rightarrow E_i^\perp \supset E_k$
(v) $(E_i^\perp)^\perp \supset E_i$
(vi) $(\cup_{i \in I} E_i)^\perp = \cap_{i \in I} E_i^\perp$
(vii) $(\cap_{i \in I} E_i)^\perp \supset \langle \cup_{i \in I} E_i^\perp \rangle$
(viii) Gelte $(U^\perp)^\perp = U$ für alle Unterräume von $E$ und $G$. Seien alle $E_i$ Unterräume. Dann gilt $(\cap_{i \in I} E_i)^\perp = \langle \cup_{i \in I} E_i^\perp \rangle$

b) Aussage (viii) ist eine Modifikation von Aussage (vii). Durch das Hinzufügen zweier weiterer Voraussetzungen

- alle $E_i$ sind Unterräume
- für alle Unterräume $U$ von $E$ und $G$ gilt $(U^\perp)^\perp = U$

erreicht man Gleichheit. Zeige anhand zweier Beispiele, daß Gleichheit nicht mehr gelten muß, wenn man auch nur eine der beiden Bedingungen wegläßt.

Warum gilt in (v) nicht Gleichheit? (Gegenbeispiel!)

**Aufgabe 14**:*(5+5=10 Punkte)*

a) Beweise die vier Aussagen von (12.4.4).

b) Zeige, daß für Unterräume $G$ von $E^*$ die Aussage von Korrollar (12.6.3) nicht stimmen muß! Finde also ein $G \subset E^*$ mit $G \neq (G^\perp)^\perp$.

**Aufgabe 15**:*(10 Punkte)*
Sei

$$0 \to E \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} G \to 0$$

eine kurze exakte Folge von $\mathbf{K}$-Vektorräumen. Eine solche *spaltet auf*, wenn ein der folgenden zwei Bedingungen gilt:

a) Es gibt eine Abbildung $\alpha : F \to E$ mit $\alpha \circ \varphi = id_E$.

b) Es gibt eine Abbildung $\beta : G \to F$ mit $\psi \circ \beta = id_G$.

Zeige, daß diese beiden Bedingungen äquivalent sind.
*(Die Bezeichnung rührt daher, daß bei einer aufspaltenden Folge Im* $\varphi = \ker \psi$ *ein direkter Summand von* $F$ *ist, d.h.* $F \simeq E \oplus G$.*)*

**Aufgabe 16**: *(7 Punkte)*
Sei

$$0 \to E_1 \to E_2 \to \cdots \to E_n \to 0$$

eine exakte Folge von endlichdimensionalen **K**-Vektorräumen. Zeige

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim E_i = 0.$$

**Abgabe der Übungen ist am Freitag, 14.Mai 1999 vor der Vorlesung!**