Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

5. Übung zur Linearen Algebra II, SS 1999

Aufgabe 17: *(3+6=9 Punkte)*

a) Seien K ein Körper, $I := \{1, 2\}$ und F ein K-Vektorraum. Es gelte $F = E_1 \oplus E_2$ für zwei Untervektorräume von F. Ferner seien für $i \in I$ die linearen Abbildungen $\pi_i : F \to E_i$ durch $x = \pi_1(x) + \pi_2(x)$ und $\varphi_i : E_i \to F$ als Inklusionsabbildung gegeben. Zeige, daß die Folge

$$0 \to E_i \xrightarrow{\varphi_i} F \xrightarrow{\pi_j} E_j \to 0$$

für $\{i, j\} \in I$ mit $i \neq j$ exakt ist.

b) Seien E, F, G und H $\mathbf{K}$-Vektorräume und

$$0 \to E \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} G \to 0$$

eine kurze exakte Folge. Sei ferner $L(E, H)$ der K-Vektorraum der K-linearen Abbildungen von E nach H (analog für $L(F, H)$ und $L(G, H)$). Die Abbildung ψ' sei durch $\psi' : L(G, H) \to L(F, H) : \sigma \mapsto \sigma \circ \psi$ definiert (analog φ'). Zeige, daß die Folge

$$0 \to L(G, H) \xrightarrow{\psi'} L(F, H) \xrightarrow{\varphi'} L(E, H) \to 0$$

exakt ist.

Aufgabe 18: *(4+4=8 Punkte)*

Seien E und F $\mathbf{K}$-Vektorräume mit Basen $(e_1, \cdots, e_n)$ und $(f_1, \cdots, f_m)$.

a) Sei $I := \{1, \cdots, n\} \times \{1, \cdots, m\}$. Definiere für $(i, k) \in I$ die Abbildungen $\Phi_{i,k} : E \times F \to K$ durch

$$\Phi_{i,k}\left(\sum_{l=1}^{n} \xi_l e_l, \sum_{t=1}^{n} \eta_t f_t\right) := \xi_i \eta_k$$

Zeige, daß $(\Phi_{i,k} | (i, k) \in I)$ eine Basis des $\mathbf{K}$-Vektorraums $B(E, F)$ bildet.

b) Beweise, daß die Abbildung

$$\theta : B(E, F) \to M_{n,m}(\mathbf{K}) : \Phi \mapsto M(\Phi, (e_1, \cdots, e_n), (f_1, \cdots, f_m))$$

ein Vektorraumisomorphismus ist.

Aufgabe 19: *(7 Punkte)*

Seien $(E, G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein duales Paar, $\dim E < \infty$ und $y_1, \cdots, y_n \in G$ beliebig. Definiere für Vektoren $x_1, \cdots, x_n \in E$ durch

$$g(x_1, \cdots, x_n) := \det \begin{pmatrix} \langle x_1, y_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, y_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_n, y_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, y_n \rangle \end{pmatrix}$$

eine Abbildung $g : E^n \to \mathbf{K}$. Zeige, daß g eine Determinantenfunktion auf E ist.

Aufgabe 20: *(5+3+2=10 Punkte)*
Der Endomorphismus φ des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ sei bezüglich der Basis $a_1 = (1,1,0), a_2 = (1,0,1)$ und $a_3 = (0,1,1)$ durch

$$M(\varphi, (a_1, a_2, a_3), (a_1, a_2, a_3)) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Sei $(\mathbb{R}^3)^*$ der Dualraum von $\mathbb{R}^3$ und (a_1^*, a_2^*, a_3^*) die zu (a_1, a_2, a_3) duale Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$. Wir definieren:

$$\Phi_\varphi : \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3)^* \to R : (x, f) \mapsto f(\varphi(x))$$

a) Zeige, daß $(\mathbb{R}^3, (\mathbb{R}^3)^*, \Phi_\varphi)$ ein duales Paar ist.

b) Bestimme $M(\Phi_\varphi, (a_1, a_2, a_3), (a_1^*, a_2^*, a_3^*))$.

c) Auf $\mathbb{R}^3$ sei die Determinantenfunktion Δ durch $\Delta(a_1, a_2, a_3) = 3$ gegeben. Bestimme bezüglich des obigen dualen Paares die zu Δ duale Determinantenfunktion.

Aufgabe 21: *(6 Punkte)*
Bestimme mittels des Satzes (12.9.2), ob die linearen Gleichungssysteme $Ax = b_1$ und $Ax = b_2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 11 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

lösbar sind.

Hinweis: *Diese Woche sind ausnahmsweise fünf Aufgaben zu bearbeiten, von denen die meisten jedoch recht leicht sind.*

Abgabe der Übung ist am Freitag, 21.Mai 1999 vor der Vorlesung!