Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

7. Übung zur Linearen Algebra II, SS 1999

Aufgabe 26:*(12 Punkte)*
Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $E := \mathbb{R}^3$ sei die symmetrische Bilinearform Φ bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$M(\Phi; (e_1, e_2, e_3), (e_1, e_2, e_3)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimme

a) Rang, Index und Signatur von Φ.

b) eine Basis (b_1, b_2, b_3) von E, so daß $M(\Phi; (b_1, b_2, b_3), (b_1, b_2, b_3))$ Diagonalgestalt hat.

c) eine orthogonale Zerlegung von (E, Φ).

Aufgabe 27:*(2+2+2+2=8 Punkte)*
Seien (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $E := \mathbb{R}^3$ und $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die durch die Matrix

$$M(\Phi; (e_1, e_2, e_3), (e_1, e_2, e_3)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegebene Abbildung.

a) Zeige, daß (E, Φ) ein pseudoeuklidischer Raum ist.

b) Bestimme eine Basis von (E, Φ) aus Lichtvektoren.

c) Zeige, daß in (E, Φ) die Schwarzsche Ungleichung nicht gilt.

d) Zeige, daß die Menge der raumartigen Vektoren nicht konvex ist.

Aufgabe 28:*(2+2+3+3=10 Punkte)*

a) Sei E ein 2-dimensionaler pseudoeuklidischer Vektorraum. Zeige:

   (i) Seien $x, y \in E$ raumartig. Dann ist $\langle x, y\rangle > 0$ genau dann, wenn x und y im selben Sektor S_1 oder S_2 liegen.

   (ii) Seien $x, y \in E$ zeitartig. Dann ist $\langle x, y\rangle < 0$ genau dann, wenn x und y im selben Sektor T^+ oder T^- liegen.

b) Seien E ein n-dimensionaler pseudoeuklidischer Vektorraum vom Index $n-1$ und $x, y \in E$ zeitartige Einheitsvektoren. Zeige:

   (i) $x + y$ zeitartig $\iff \langle x, y\rangle < 0$. Was bedeutet dies geometrisch?

   (ii) $x + y$ raumartig $\iff \langle x, y\rangle > 0$ und $x + y \neq 0$. Was bedeutet dies geometrisch?

Aufgabe 29:*(10 Punkte)*
Seien E ein n-dimensionaler pseudoeuklidischer Vektorraum vom Index $n-1$ und $x, y \in E$ zeitartige Einheitsvektoren. Gilt dann $\langle x, y\rangle^2 \geq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$? Wann gilt Gleichheit? Ist die Einschränkung auf Einheitsvektoren notwendig?

Abgabe der Übung ist am Freitag, 4. Juni 1999 vor der Vorlesung!