Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

8. Übung zur Linearen Algebra II, SS 1999

Aufgabe 30:*(4+2+2+2=10 Punkte)* Sei $E = \mathbb{R}^3$. Bezeichne $\mathfrak{e}$ die Standardbasis von E und $\mathfrak{a}$ eine andere Basis von E bestehend aus den Vektoren $a_1 := (1,0,0), a_2 := (1,1,0)$ und $a_3 := (0,1,1)$.
Die Bilinearform Φ auf E und der Endomorphismus φ von E seien jeweils durch

$$M(\Phi;\mathfrak{e},\mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } M(\varphi;\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Hierdurch wird (E, Φ) zu einem pseudoeuklidischen Raum.

a) Bestimme die zu φ adjungierte Abbildung.

b) Ist φ eine eigentliche pseudoeuklidische Drehung?

c) Bestimme die Eigenvektoren von φ.

d) Gibt es Eigenvektoren, die Lichtvektoren sind?

Aufgabe 31:*(3+3+4+2=12 Punkte)*

a) Seien (E, Φ) ein pseudoeuklidischer Raum der Dimension n vom Index $n-1$ und φ eine pseudoeuklidische Drehung von E. Zeige, daß für einen Lichtvektor $0 \neq l \in E$ gilt:

$$\Phi(l, \varphi(l)) = 0 \Longleftrightarrow l \text{ ist Eigenvektor von } \varphi$$

b) Sei (E, Φ) ein pseudoeuklidischer Raum und $\varphi : E \to E$ eine selbstadjungierte Abbildung.

(i) Finde (E, Φ) und φ so, daß die beiden Bedingungen
- $\Phi(l, \varphi(l)) \neq 0$ für alle Lichtvektoren $l \in E$
- E besitzt keine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von φ

gelten.
Hinweis: *Ein geeigneter pseudoeuklidischer Raum kam bereits in der Vorlesung vor.*

(ii) Sei (E, Φ) nun ein *beliebiger* pseudoeuklidischer Raum der Dimension $n \geq 2$. Finde φ so, daß E keine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von φ besitzt.

(iii) Man weiß, daß E eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von φ besitzt, wenn
- $\dim E \geq 3$
- $\Phi(l, \varphi(l)) \neq 0$ für alle Lichtvektoren $l \in E$

gilt. Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 32: *(1+3+5+2=11 Punkte)*

a) Sei $(G,+)$ eine abelsche Gruppe. Zeige, daß G durch die äußere Verknüpfung

$$\cdot : \mathbb{Z}\times G : (m,a) \mapsto \begin{cases} \overbrace{a+\ldots+a}^{m \text{ mal}}, & m \geq 0 \\ \underbrace{-a-\ldots-a}_{-m \text{ mal}}, & m < 0 \end{cases}$$

zu einem $\mathbb{Z}$-Modul wird.

b) Zeige, daß $(\mathbb{Q},+)$ kein *freier* $\mathbb{Z}$-Modul ist.

c) Seien $R = (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z},+,\cdot)$, $U_1 = \{\bar{0},\bar{5},\bar{10}\}$ und $U_2 = \{\bar{0},\bar{3},\bar{6},\bar{9},\bar{12}\}$.

Beweise, daß U_1 und U_2 R-Untermoduln von R sind und bestimme Repräsentantensysteme der Faktormoduln R/U_1 und R/U_2.

Ist R als R beziehungsweise als $\mathbb{Z}$-Modul frei? Falls ja, gib alle Basen an!

d) Betrachte den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}^3$. Zeige, daß $U = \{z \in \mathbb{Z}^3 | 10z_1 - 5z_2 - 4z_3 = 0,\ 6 \text{ teilt } z_2\}$ ein $\mathbb{Z}$-Untermodul ist.

Aufgabe 33: *(3+2+2=7 Punkte)*

Sei E ein R-Modul und $(E_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln mit $E = \sum_{i\in I} E_i$.

a) Zeige, daß die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(i) Jedes $x \in E$ läßt sich eindeutig in der Form $x = \sum_{i\in I} x_i$ mit $x_i \in E_i$ und fast alle x_i sind Null darstellen.

(ii) Für alle $i \in I$ gilt $E_i \cap \sum_{k\neq i} E_k = (0)$.

b) Sei $E = \oplus_{i\in I} E_i$. Zeige, daß die kanonischen Injektionen $\iota_k : E_k \to E$ und Projektionen $\pi_k : E \to E_k$ R-Modulhomomorphismen sind.

c) Seien E und F zwei R-Moduln und $L(E,F) = Hom(E,F)$ die Menge der R-linearen Abbildungen von E nach F.

Zeige, daß $L(E,F)$ mit den Verknüpfungen

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

einen R-Modul bildet.

Zur nächsten Aufgabe: *Die folgende Aufgabe ist freiwillig und muß auch keineswegs mit Mitteln der Vorlesung gelöst werden! Diese Aufgabe hat zwar nichts mit hyberbolischer, dafür um so mehr mit euklidischer Geometrie zu tun.*

Aufgabe 34*: *(0 Punkte)*

Ist es möglich eine beliebig große Menge von Punkten zu finden, die alle auf einem Kreis liegen und ganzzahlige Koordinaten besitzen, wobei alle Abstände zwischen ihnen ganze Zahlen betragen?

Abgabe der Übung ist am Freitag, 11. Juni 1999 vor der Vorlesung!