Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

9. Übung zur Linearen Algebra II, SS 1999

Aufgabe 35: *(2+2+3=7 Punkte)*
Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $S \subset M$ eine Teilmenge von M. Analog zu Vektorräumen definiert man nun lineare (Un)Abhängigkeit.
Gib im Folgenden jeweils ein Beispiel für R, M und S, welches die angegebenen Bedingungen erfüllt.

a) S ist linear abhängig, aber kein Element von S liegt im Erzeugnis der übrigen Elemente.

b) M ist frei, S ist linear abhängig und $M = \langle S \rangle$, aber es gibt keine Teilmenge von S, die Basis von M ist.

c) M ist frei, S ist linear unabhängig, aber S läßt sich nicht zu einer Basis von M ergänzen.

Aufgabe 36: *(2+4+4=10 Punkte)*
Zeige

a) $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^3, +, \cdot)$ ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul.

b) Für den zu $\mathbb{Z}^3$ dualen Modul gilt: $(\mathbb{Z}^3)^* \cong \mathbb{Z}^3$.

c) Bestimme den zum $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$ dualen Modul $\mathbb{Q}^* = Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$.

Aufgabe 37: *(6+4=10 Punkte)*
Sei E ein R-Modul und U, V Untermoduln von E. Ferner seien $\pi : E \to E/U$ und $\rho : E \to E/V$ die kanonischen Restklassenhomomorphismen und

$$\sigma : E \to E/U \oplus E/V \; : x \mapsto (\pi(x), \rho(x))$$

die Abbildung in die äußere direkte Summe.

a) Zeige

   (i) σ ist ein R-Modulhomomorphismus.

   (ii) $\ker \sigma = U \cap V$.

   (iii) Gilt $E = U + V$, dann ist σ surjektiv.

b) Folgere aus a):

   (i) Ist $E = U + V$, so gilt $E/(U \cap V) \cong E/U \oplus E/V$.

   (ii) Sind n und m teilerfremde natürlich Zahlen, so gilt $\mathbb{Z}/(n \cdot m) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Aufgabe 38: *(6+4+3=13 Punkte)*

a) Seien $\mathbf{K}$ ein Körper, $R := \mathbf{K}[X]$ der Polynomring in einer Veränderlichen über $\mathbf{K}$ und $f, g \in \mathbf{K}[X]$ Polynome mit $g \neq 0$.

   Zeige, daß es dann eindeutige Elemente $q, r \in R$ mit $f = q \cdot g + r$ und $\deg r < \deg g$ gibt.

b) Sei I das von den Polynomen $f(X) = X^4 - 5X^3 + 6X^2 - 5X + 1$ und $g(X) = -X^4 + 4X^3 + 2X^2 - 12X + 3$ erzeugte Ideal in $\mathbb{Q}[X]$. Bestimme ein Polynom $h(X)$ mit $I = (h(X))$.

   Hinweis: *Dies macht man natürlich mit dem Euklidischen Algorithmus.*

c) Ist (X, n) für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ein Hauptideal im Ring $\mathbb{Z}[X]$?

Abgabe der Übung ist am Freitag, 18.Juni 1999 vor der Vorlesung!