Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

10. Übung zur Linearen Algebra II, SS 1999

Aufgabe 39: *(1+1+2+4=8 Punkte)*
Betrachte den Ring $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b \cdot \sqrt{-5} | a, b \in \mathbb{Z}\}$ und die Normabbildung

$$\| \cdot \| : R \to \mathbb{Z} : a + b\sqrt{-5} \mapsto a^2 + 5b^2.$$

Zeige:

a) R ist ein Unterring der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

b) Für alle $x, y \in R$ gilt $\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|$.

c) $x \in R$ ist genau dann eine Einheit in R, wenn $\|x\|$ eine Einheit in $\mathbb{Z}$ ist. Bestimme alle Einheiten von $\mathbb{Z}$ und R.

d) $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$ sind zwei verschiedene Faktorisierungen in unzerlegbare Elemente, d.h. $2, 3, (1 + \sqrt{-5})$ und $(1 - \sqrt{-5})$sind paarweise nicht assoziiert und unzerlegbar.

   Folgere hieraus, daß diese Elemente keine Primelemente sind und R kein Hauptidealring ist.

Aufgabe 40: *(8 Punkte)*
Zeige, daß das Gleichungssystem

$$x \equiv 9 \mod 10, \qquad x \equiv 5 \mod 11, \qquad x \equiv 11 \mod 13$$

über $\mathbb{Z}$ modulo 1430 eindeutig lösbar ist, d.h. es ist lösbar und alle Lösungen haben die gleiche Restklasse modulo 1430. Bestimme alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 41: *(2+4+2+3=11 Punkte)*
Seien p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Zeige:

a) Die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{F}_p[X] : \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} X^i$$

   ist ein Ringhomomorphismus.

   (Hierbei bezeichnet $\overline{a_i}$ die Restklasse von $a_i \in \mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$)

b) Wenn $f \in \mathbb{Z}[X]$ normiert und $\varphi(f) \in \mathbb{F}_p[X]$ unzerlegbar ist, dann ist auch f in $\mathbb{Z}[X]$ unzerlegbar.

c) Setzt man in b) f nicht als unzerlegbar voraus, dann ist die Aussage falsch.

d) Das Polynom $f(X) = X^4 - 6X^3 + 14X^2 - 7X + 3 \in \mathbb{Z}[X]$ ist unzerlegbar.

Aufgabe 42: *(3+6+4=13 Punkte)*
Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_3$ sei durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 & 4 \\ -4 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimme Basen der freien $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathbb{Z}_4$ und $\mathbb{Z}_3$ bezüglich denen die Matrix der linearen Abbildung φ Elementarteilerform hat.

b) Bestimme unimodulare Matrizen U, V sowie eine Matrix $D \in M_{3,4}(\mathbb{Z})$, welche Elementarteilerform hat, so daß $UAV = D$ gilt.

   (Eine Matrix M heißt *unimodular*, wenn $\det(A)$ eine Einheit im Hauptidealring ist.)

c) Bestimme die Elementarteiler der obigen Matrix mittels der Determinantenteiler.

Hinweis: *Die Aufgabenteile a) und b) dürfen, müssen aber nicht, mit Maple bearbeitet werden. In der Maplelösung müssen ausführliche Bemerkungen stehen.*

Abgabe der Übung ist am Freitag, 25. Juni 1999 vor der Vorlesung!