Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

11. Übung zur Linearen Algebra II, SS 1999

Aufgabe 43: *(4+2+4=10 Punkte)*

a) Zeige mit den Mitteln der Vorlesung folgende Aussage: Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Dann gibt es positive Primzahlen $p_1, \cdots, p_r$ und Exponenten $n_i \in \mathbb{N}_0$, so daß

$$G \cong \mathbb{Z}/p_1^{n_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_r^{n_r}\mathbb{Z}$$

gilt.

Anmerkung: *Man kann zeigen, daß die Zahlen r, p_i und n_i (bis auf die Reihenfolge) schon durch G eindeutig bestimmt sind. Diese Aussage (Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Darstellung) heißt* Hauptsatz für endliche abelsche Gruppen.

b) Wieviele verschiedene (d.h. nichtisomorphe) abelsche Gruppen der Ordnung 100 gibt es? Wieviel der Ordnung 60? Bestimme jeweils eine Zerlegung gemäß Teil a).

c) Zu welcher der Gruppen von diesem Typ ist die Torsion des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}^3/\operatorname{Im}\varphi$ aus Aufgabe 42 isomorph?

Aufgabe 44: *(10 Punkte)*

Bestimme die Determinantenteiler und Elementarteiler von

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 12 \\ 6 & 12 & 12 \end{pmatrix}$$

sowie invertierbare Matrizen L und R aus $M_{3,3}(\mathbb{Z})$, so daß LAR Elementarteilerform hat.

Aufgabe 45: *(6+4=10 Punkte)*

a) Bestimme die Elementarteiler der Matrix $(A - I \cdot X)$ und die erste Normalform der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{Q}).$$

b) Bestimme die zweite Normalform der Begleitmatrix A_f zum Polynom

$$f(X) = (X+1)^3(X-2)(X^2-3) \in \mathbf{K}[X]$$

für die Körper $\mathbf{K} = \mathbb{Q}$ und $\mathbf{K} = \mathbb{F}_{11}$.

Aufgabe 46: *(2+8=10 Punkte)*
Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}_4 \to \mathbb{R}_4$ sei bezüglich der Standardbasis $(e_1, \cdots, e_4)$ von $\mathbb{R}_4$ durch die Matrix

$$M := M(\varphi; (e_1, \cdots, e_4), (e_1, \cdots, e_4)) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$$

gegeben.

a) Zeige, daß das charakteristische Polynom $\chi_\varphi \in \mathbb{R}[X]$ in $\mathbb{R}[X]$ in Linearfaktoren zerfällt.

b) Bestimme die Jordansche Normalform J von M und eine Basis $(v_1, \cdots, v_4)$ von $\mathbb{R}_4$ bezüglich der $J = M(\varphi; (v_1, \cdots, v_4), (v_1, \cdots, v_4))$ gilt.

Dieses Übungsblatt ist das letzte, welches in die Punktewertung zur **Klausurzulassung** eingeht, d.h. alle mit mindestens 176 Punkten sind zur Klausur am 10. Juli um 9 Uhr c.t. im Hörsaal I zugelassen. Eine endgültige Liste der Zugelassenen wird in der Klausurwoche aushängen. Wie immer muß der Studierenden- und der Personalausweis zur Klausur mitgebracht werden.

Falls eine **Nachklausur** stattfinden muß, wird diese am Freitag, 15.10.1999 um 9 Uhr c.t. im Hörsaal IV sein.

Die Klausur wird in den Übungen der letzten Vorlesungswoche besprochen, die **Klausureinsicht** wird am Mittwoch 14.7. um 16 Uhr im Seminarraum 5 sein.

Abgabe der Übung ist am Freitag, 2. Juli 1999 vor der Vorlesung!