Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

Verfahren zur Berechnung der Jordanschen Normalform

Sei φ ein Endomorphismus des K-Vektorraums $E = K_n$ für einen Körper K.
Das charakteristische Polynom
$\boldsymbol{\chi_\varphi} \in K[X]$ von φ zerfalle vollständig in Linearfaktoren.
Mit dem folgenden beschriebenen und begründeten Verfahren kann man eine Basis von E bestimmen, bzgl. der die Matrix von φ Jordan-Normalform hat.

Sei $\chi_\varphi = (X - \boldsymbol{\lambda_1})^{\boldsymbol{e_1}} \cdots (X - \boldsymbol{\lambda_m})^{\boldsymbol{e_m}}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ und $e_i \in \mathbb{N}$ sowie
$\boldsymbol{A}$ die Matrix von φ bzgl. der Standardbasis von E.
Für $j = 0, \ldots, e_i$ sei
$\boldsymbol{V_j^{(i)}}$:=Kern der Abbildung $(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^j$,
also die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $(A - \lambda_i \cdot I)^j \cdot x = 0$.

(1) Es gilt offensichtlich
$\{0\} = V_0^{(i)} \subsetneqq V_1^{(i)} \subseteq V_2^{(i)} \subseteq \ldots .$
Ferner sind die $V_j^{(i)}$ invariant bei φ, d.h. für $x \in V_j^{(i)}$ gilt $\varphi(x) \in V_j^{(i)}$;
denn aus $(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^j(x) = 0$ folgt
$(\varphi-\lambda_i\cdot\mathrm{id})^j(\varphi(x)) = ((\varphi-\lambda_i\cdot\mathrm{id})^j\circ\varphi)(x) = (\varphi\circ(\varphi-\lambda_i\cdot\mathrm{id})^j)(x) = \varphi((\varphi-\lambda_i\cdot\mathrm{id})^j(x)) = 0$

Wir definieren
$\boldsymbol{r_i} := \mathrm{Min}\{j \in \mathbb{N} \mid V_j^{(i)} = V_{j'}^{(i)} \text{ für alle } j' \geq j\}$.
Dann gilt:

(2) $r_i \leq e_i$ und $r_i = \mathrm{Min}\{j \mid V_j^{(i)} = V_{j+1}^{(i)}\}$. Daher:
$\{0\} = V_0^{(i)} \subsetneqq V_1^{(i)} \subsetneqq V_2^{(i)} \subsetneqq \cdots \subsetneqq V_{r_i}^{(i)}$.
(3) $E = \bigoplus_{i=1}^m V_{r_i}^{(i)}$
(4) $\dim V_{r_i}^{(i)} = e_i$.
(5) r_i ist der Exponent von $(X - \lambda_i)$ im Minimalpolynom von φ.

Wähle ein $i \in \{1, \ldots, m\}$. Sei
$\boldsymbol{\lambda} := \lambda_i$,
$\boldsymbol{e} := e_i$,
$\boldsymbol{r} := r_i$,
$\boldsymbol{V_j} = V_j^{(i)}$.

Anmerkung: Sind $y_1, \ldots y_t \in V_j$ linear unabhängig modulo V_{j-1} und $j > 1$. Dann sind $(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})(y_1), \cdots, (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})(y_t)$ Vektoren von V_{j-1}, die modulo V_{j-2} linear unabhängig sind.
Beweis: Da die y_i in V_j liegen ist $(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})^{j-1}((\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})(y_i)) = (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})^j(y_i) = 0$, also liegen die $(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})(y_i)$ in V_{j-1} für alle $i = 1, \ldots, t$.
Wären sie linear abhängig modulo V_{j-2}, so gäbe es $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$, nicht alle $= 0$ mit $\sum_{i=1}^t \alpha_i \cdot (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})(y_i) \in V_{j-2}$, d.h. mit $(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})^{j-2} \left(\sum_{i=1}^t \alpha_i \cdot (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})(y_i)\right) = 0$. Dann wäre aber $(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})^{j-1} \left(\sum_{i=1}^t \alpha_i \cdot y_i\right) = (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})^{j-2} \left(\sum_{i=1}^t \alpha_i \cdot (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})(y_i)\right) = 0$ und folglich $\sum_{i=1}^t \alpha_i \cdot y_i \in V_{j-1}$, d.h. die $y_1, \ldots, y_t$ wären modulo V_{j-1} linear abhängig entgegen der Voraussetzung.

q.e.d.

Setze
$\boldsymbol{s_j} := \dim(V_j/V_{j-1}) = \dim V_j - \dim V_{j-1}$ für alle $j = 1, \ldots, r$.
Nach (2) und (4) ist dann $s_j \geq 1$ und
$\dim V_j = s_1 + \cdots + s_j$ für alle $j = 1, \ldots, r$.

Konstruiere nun rekursiv eine passende Basis von V_r:
Wähle Vektoren

$\boldsymbol{x_{1,r}, \ldots x_{s_r,r}} \in V_r$ linear unabhängig modulo V_{r-1}.

(Bestimme etwa eine Basis von V_{r-1} und ergänze sie zu einer Basis von V_r. Die dazu benötigten s_r Vektoren sind solche $x_{1,r}, \ldots x_{s_r,r} \in V_r$.)
Definiere dann
$x_{1,r-1}, \ldots x_{s_r,r-1} \in V_{r-1}$ durch

$\boldsymbol{x_{l,r-1}} := (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})(x_{l,r}) \quad$ für $l = 1, \ldots, s_r$.
Nach der Anmerkung sind dann die $x_{1,r-1}, \ldots x_{s_r,r-1} \in V_{r-1}$ Vektoren von V_{r-1} die modulo V_{r-2} linear unabhängig sind. Also ist $s_{r-1} \geq s_r$
Falls $s_{r-1} > s_r$ ergänze diese durch $s_{r-1} - s_r$ Vektoren
$\boldsymbol{x_{s_r+1,r-1}, \ldots x_{s_{r-1},r-1}} \in V_{r-1}$ zu einer Vertretern einer Basis von V_{r-1}/V_{r-2}

(Bestimme eine Basis von V_{r-2}, vereinige diese mit den $x_{1,r-1}, \ldots x_{s_r,r-1} \in V_{r-1}$ und ergänze diese linear unabhängige Familie mit $s_{r-1} - s_r$ Vektoren zu einer Basis von V_{r-1}. Diese zuletzt hinzugefügten Vektoren sind dann die $x_{s_r+1,r-1}, \ldots x_{s_{r-1},r-1}$.)

Fahre so fort. Allgemein:
Seien $x_{1,j}, \ldots, x_{s_j,j} \in V_j$ schon bestimmt als Vertreter einer Basis modulo V_{j-1}, so definiere $x_{1,j-1}, \ldots x_{s_j,j-1} \in V_{j-1}$ durch
$\boldsymbol{x_{l,j-1}} := (\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id})(x_{l,j}) \quad$ für $l = 1, \ldots, s_j$.
Nach der Anmerkung sind dann die $x_{1,j-1}, \ldots x_{s_j,j-1} \in V_{j-1}$ Vektoren von V_{j-1} die modulo V_{j-2} linear unabhängig sind. Also ist $s_{j-1} \geq s_j$.
Falls $s_{j-1} > s_j$ ist, ergänze die durch $s_{j-1} - s_j$ Vektoren
$\boldsymbol{x_{s_j+1,j-1}, \ldots x_{s_{j-1},j-1}} \in V_{j-1}$ zu Vertretern einer Basis von V_{j-1}/V_{j-2}.

(Bestimme eine Basis von V_{j-2}, vereinige diese mit den $x_{1,j-1}, \ldots x_{s_j,j-1} \in V_{j-1}$ und ergänze diese linear unabhängige Familie mit $s_{j-1} - s_j$ Vektoren zu einer Basis von V_{j-1}. Diese zuletzt hinzugefügten Vektoren sind dann die $x_{s_j+1,j-1}, \ldots x_{s_{j-1},j-1}$.)

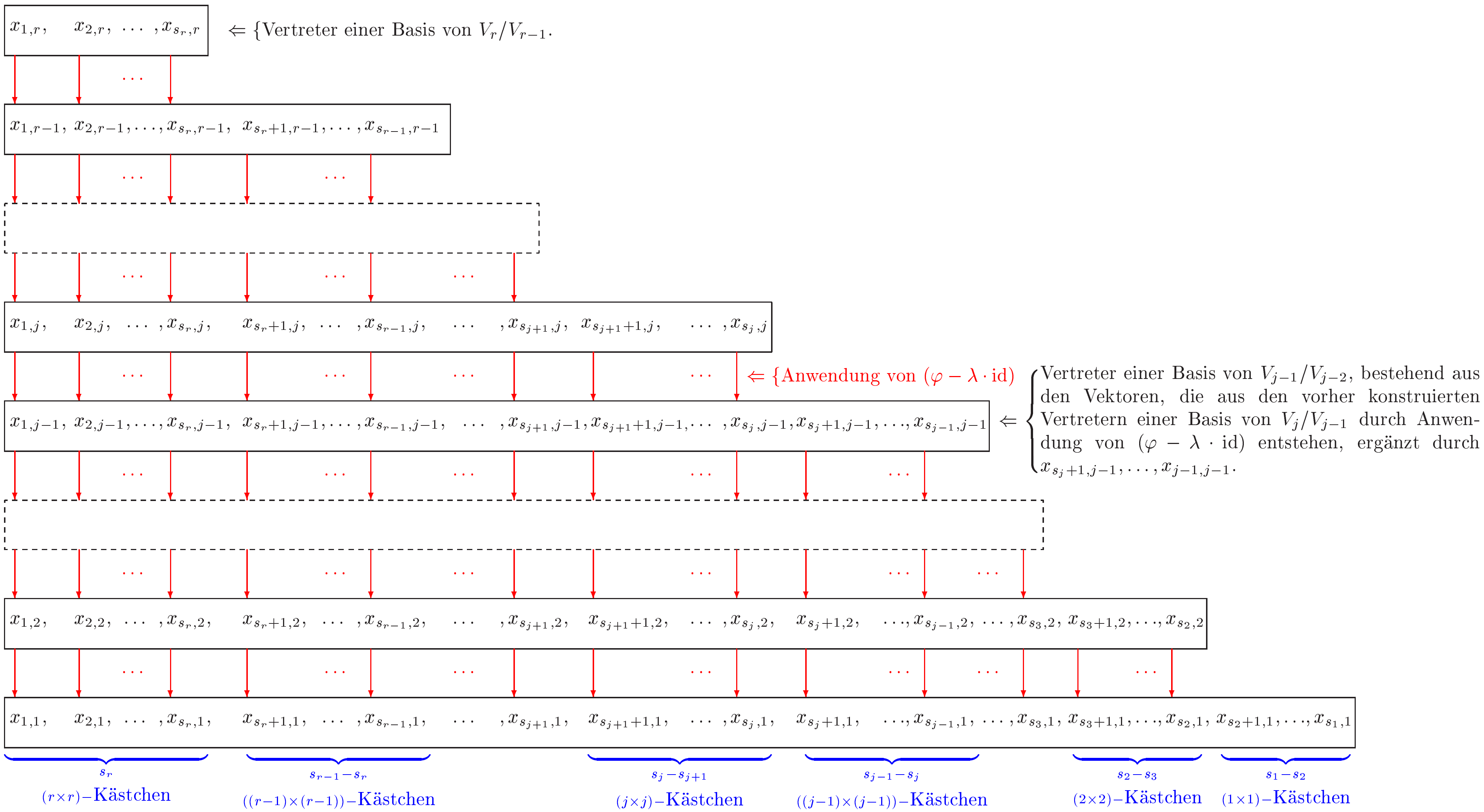
(6) Es gilt $\varphi(V_r) \subseteq V_r$ und die Matrix der Abbildung $\varphi|_{V_r} \longrightarrow V_r$ bezüglich der Basis $x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,r}, x_{2,1}, \ldots$ hat Jordan-Normalform.

Bemerkung: Ist der Eigenraum jedes Eigenwertes von φ eindimensional, so funktioniert auch das folgende (wesentlich einfachere) Verfahren:
Sei $(X - \lambda_1)^{e_1} \cdots (X - \lambda_m)^{e_m}$ das charakteristische Polynom von φ (in diesem Fall ist dies auch das Minimalpolynom). Wähle $x_{1,\lambda_1}, \ldots, x_{1,\lambda_m}$ als Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ von φ.
Für $i = 1, \ldots, m$ wähle rekursiv Elemente x_{j,λ_i}, $j = 2, \ldots, e_i$ mit

$$(A - \lambda_i \cdot I) \cdot x_{j,\lambda_i} = x_{j-1,\lambda_i}.$$

Die $x_{1,\lambda_1}, x_{2,\lambda_1}, \ldots x_{e_1,\lambda_1}, x_{1,\lambda_2}, \ldots, x_{e_m,\lambda_m}$ bilden dann eine Basis von E, bzgl. der die Matrix von φ Jordan-Normalform hat.

Die Matrix der Abbildung $\varphi|_{V_r} \longrightarrow V_r$ bezüglich der Basis $x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,r}, x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots$ hat Jordan-Normalform.



Beispiele:

1. Bestimmen Sie für die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{Q}) \text{ und } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{C})$$

   Matrizen $U_1,\ U_2$, so daß $U_i^{-1} \cdot A_i \cdot U_i$ Jordan-Normalform hat für $i = 1, 2$.

2. Bestimmen Sie die Jordan-Normalformen der Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 3 & 0 \\ -12 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$