Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

Sei φ ein Endomorphismus des $\mathbf{K}$-Vektorraums $E = \mathbf{K}_4$ für einen Körper $\mathbf{K}$, welcher bezüglich der Standardbasis $\mathfrak{e}$ durch die Matrix

$$A := M(\varphi;\mathfrak{e},\mathfrak{e}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 3 & 0 \\ -12 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Das charakteristische Polynom $\chi_\varphi \in \mathbf{K}[X]$ von φ ist $\chi_\varphi(\lambda) = (\lambda - 1)^4$. Damit ergeben sich:

- $V_0 = \{0\}, \dim V_0 = 0, s_0 = 0$
- $V_1 := \ker(A - \lambda I)\,, \dim V_1 = 2\,, s_1 = \dim V_1 - \dim V_0 = 2$
  $\left[V_1 = \langle y_1, y_2\rangle \text{ mit } y_1 = (1,0,-4,6)^T, y_2 = (0,1,0,0)^T\right]$
- $V_2 := \ker(A - \lambda I)^2\,, \dim V_2 = 3\,, s_2 = \dim V_2 - \dim V_1 = 1$
  $[V_2 = \langle y_1, y_2, y_3\rangle \text{ mit } y_3 = (0,0,2,-3)]$
- $V_3 := \ker(A - \lambda I)^3\,, \dim V_3 = 4\,, s_3 = \dim V_3 - \dim V_2 = 1$
  $[V_3 = \langle y_1, y_2, y_3, y_4\rangle \text{ mit } y_4 = (0,0,0,1)]$

Damit weiß ich bereits:

- Es gibt zwei Jordankästchen, da die Dimension von V_1 der Anzahl der Jordankästchen zum Eigenwert λ entspricht.
- Da V_3 bereits der gesamte Raum E ist, muß die Kette $V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset E$ bereits ab V_3 stationär werden. Der Grad des Minimalpolynoms ist also $r = 3$ und damit ist mein größtest Jordankästchen ein 3×3-Kästchen.

Aus diesen beiden Punkten weiß ich bereits wie die Jordansche Normalform von A aussieht. Aber ich weiß nichts über die Basiswechselmatrix U. Diese muß ich noch berechnen:

a) Ich suche mir $s_3 = 1$ Vektor, der in V_3 aber nicht in V_2 liegt. Dies ist etwa $x_{1,3} := y_4$. Damit berechne ich

$$x_{1,2} := (A - \lambda I)x_{1,3} = (1,0,0,0)^T.$$

$x_{1,2}$ liegt in V_2, aber nicht in V_1.

b) Ich suche mir $s_2 = 1$ Vektor, der in V_2 aber nicht in V_1 liegt. Falls ich eben geeignete Vektoren berechnet habe, muß ich sie benutzten. Ich habe $x_{1,2}$ berechnet, also nehme ich ihn. Weiter Vektoren brauche ich wegen $s_2 = 1$ nicht. Damit berechne ich

$$x_{1,1} := (A - \lambda I)x_{1,2} = (-2,0,8,12)^T.$$

$x_{1,1}$ liegt in V_1, aber nicht in V_0.

c) Ich suche mir $s_1 = 2$ linear unabhängige Vektoren, die in V_1 aber nicht in V_0 liegen. Falls ich eben geeignete Vektoren berechnet habe, muß ich sie benutzten. Ich habe $x_{1,1}$ berechnet, also nehme ich ihn. Weiter Vektoren habe ich nicht berechnet. Ich brauche aber zwei Vektoren, also suche ich mir noch einen weiteren von $x_{1,1}$ linear unabhängigen Vektor in V_1, der nicht in V_0 liegt, etwa y_2. Setze $x_{2,1} := y_2$.

d) Damit bin ich fertig. Mehr als vier linear unabhängige Vektoren kann es nicht geben, außerdem hat V_0 Dimension Null und kann keine weiteren Vektoren beisteuern.

Die Spalten der Basiswechselmatrix U besteht aus den Vektoren $x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}$ und $x_{2,1}$.
Also ist

$$U = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$