Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

Lösungshinweise zur 12. Übung der Linearen Algebra II, SS 1999

Aufgabe 47: *(0 Punkte)*

Es gibt eine ONB $(e_1, \cdots, e_n)$ von E mit $M(\Phi; (e_1, \cdots, e_n), (e_1, \cdots, e_n)) = diag(\lambda_i)$, wobei

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 & \text{für } i \in \{1, \cdots, p\} \\ -1 & \text{für } i \in \{p+1, \cdots, r\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Ferner gibt es eine Dualbasis $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ zu $(e_1, \cdots, e_n)$. Setze $\sigma_i := e_i^*$. Seien $x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i$ und $y = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i e_i$ Elemente aus E. Dann gilt

$$\Phi(x,y) = \Phi(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \sum_{i=1}^{n} b_i e_i) = \sum_{i=1}^{p} a_i b_i + \sum_{i=p+1}^{r} -a_i b_i = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i(x)\sigma_i(y) - \sum_{i=p+1}^{r} -\sigma_i(x)\sigma_i(y).$$

Aufgabe 48: *(0 Punkte)*

Berechne $\ker(A^T) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Damit ist der Lösungsraum L des transponierten homogenen Systems $L = \langle (3, 2, -1)^T \rangle$. Die Orthogonalitätsbedingung führt zu

$$\langle (3, 2, -1)^T, (1, a, 1)^T \rangle = 0 \Longleftrightarrow a = -1$$

Also ist das LGS genau dann lösbar, wenn $a = -1$ gilt.

Aufgabe 49: *(0 Punkte)*

Setze

$$e_1 \equiv \begin{cases} 1 & \mod 7 \\ 0 & \mod 88 \end{cases}, \qquad e_2 \equiv \begin{cases} 1 & \mod 8 \\ 0 & \mod 77 \end{cases} \quad \text{und } e_3 \equiv \begin{cases} 1 & \mod 11 \\ 0 & \mod 56 \end{cases}.$$

Berechne $\mathrm{ggT}(88, 7)$ und führe die 'Rückrechnung' durch: $1 = 4 - 3 = 4 - (7 - 4) = (88 - 12 \cdot 7) - 7 + (88 - 12 \cdot 7) = 2 \cdot 88 - 25 \cdot 7 \Rightarrow e_1 = 176$.
Analog ergeben sich $1 = 29 \cdot 8 - 3 \cdot 77 \Rightarrow e_2 = -231$ und $e_3 = 56$. Eine Lösung ist also $x = -2 \cdot 176 + 2 \cdot (-231) - 2 \cdot 56 = -926$. Die allgemeine Lösung ist $-926 + \mathbb{Z} \cdot 616$ und die kleinste positive ist 306.

Aufgabe 50: *(0 Punkte)*

a) (1) Das charakteristische Polynom von A ist $\chi_A = (x-1)^4$.

(2) $V_1 := \ker(A - 1 \cdot I)$ wird von den beiden Vektoren $y_1 = (1,0,1,0)^T$ und $y_2 = (-2,-1,0,1)^T$ erzeugt.

(3) $V_2 := \ker(A - 1 \cdot I)^2$ wird von den Vektoren y_1, y_2 und $y_3 = (3,1,0,0)^T$ erzeugt.

(4) $V_3 := \ker(A - 1 \cdot I)^3 = \mathbb{Q}^4$. Damit gilt $r = 3, s_3 = 1, s_2 = 1$ und $s_1 = 2$.

(5) Wähle nun vier linear unabhängige Vektoren, etwa y_1, y_2, y_3 und $y_4 = (1,0,0,0)^T$. Setze $x_{1,3} := y_4$. Berechne $x_{1,2} = (A-I)x_{1,3} \rightsquigarrow x_{1,2} = (0,1,-1,-2)^T$ und $x_{1,1} = (A-I)x_{1,2} \Rightarrow x_{1,1} = (0,-1,2,1)^T$.

Setze $x_{2,1} := y_1$. Dann ist

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) (1) Das charakteristische Polynom von B ist $\chi_B = (x-4)^2(x-2)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$

(2) Berechne $ER(2) = V_1^{(1)} = \ker(B - 2I) \Rightarrow \dim V_1^{(1)} = 2$. Also ist $r_1 = 1$ und ich bekomme zwei Jordankästchen zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$.

(3) Berechne $ER(4) = V_1^{(2)} = \ker(B - 4I) \Rightarrow \dim V_1^{(2)} = 1$. Also bekomme ich nur ein Jordankästchen zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$.

Die JNF ist somit

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Frage: Was wäre bei $\chi_A = (x-\lambda)^5$ zu tun? $\dim(\ker(A - \lambda I))$ liefert mir nur die Anzahl der Jordankästchen. Angenommen, es gäbe zwei. Wie erhalte ich die Größe der Kästchen? Es gibt schließlich mehrere Möglichkeiten!

Hinweis: Was liefert mir $\dim(\ker(A - \lambda I)^2 \dots)$?

c) Seien C und D Matrizen, deren Polynome in Linearfaktoren zerfallen. Dann gilt: C und D sind genau dann ähnlich, wenn sie die gleiche JNF haben *(Beweis!)*. Also ist die Anzahl der Aquivalenzklassen in $M_{7,7}(\mathbb{Q})$ mit charakteristischem Polynom $(x-1)^4(x-2)^3$ gleich der Anzahl der verschiedenen 7×7-Matrizen mit charakteristischem Polynom $(x-1)^4(x-2)^3$ in JNF. Hierbei zählen Permutationen der Jordanblöcke nicht.

Zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gibt es fünf Möglichkeiten $A_i \in M_{4,4}(\mathbb{Q})$ *(Welche?)* mit Minimalpolynomen $\mu_1 = (x-1), \mu_2 = (x-1)^2, \cdots, \mu_4 = (x-1)^4$ *(Welches Minimalpolynom gehört zu welcher Matrix?)*.

Zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$ gibt es drei Möglichkeiten $B_j \in M_{3,3}(\mathbb{Q})$ *(Welche? Und wie sehen die Minimalpolynome aus?)*

Insgesamt gibt es also $3 \cdot 5 = 15$ Äquivalenzklassen mit jeweiliger JNF $diag(A_i, B_j)$.