Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

1. Klausur zur Linearen Algebra I, WS 1998/99

Aufgabe 1 (*12 Punkte*)

Gegeben sei die Permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_5$.

a) Bestimme alle Inversionen von σ, sowie die Inversionszahl $\mathrm{I}(\sigma)$, die Ordnung $\mathrm{ord}(\sigma)$ und das Vorzeichen (Signum) ε_σ.

b) Bestimme die Inversen der beiden Elemente σ und σ^2.

c) Schreibe σ als Produkt von Transpositionen.

d) Hat $\mathfrak{S}_5$ eine siebenundzwanzigelementige Untergruppe?

Aufgabe 2 (*9 Punkte*)

a) Bestimme alle Lösungen der folgenden Gleichungen in dem jeweils angegebenen Ring:

(i) $\bar{4}x + \bar{3} = \bar{5}$ in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
(ii) $\bar{3}x + \bar{6} = \bar{4}$ in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.
(iii) $\bar{2}x - \bar{6} = \bar{3}$ in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

b) Gib jeweils alle Nullteiler der drei in a) genannten Ringe an!

Aufgabe 3 (*12 Punkte*)
Es sei $n \in \mathbb{N}$ und R der Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Man zeige:

a) Für $a \in \mathbb{Z}$ ist $\overline{a}$ genau dann in R invertierbar, wenn a und n teilerfremd sind.
Hinweis: *Für geeignete $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt $ggT(a,n) = xa + yn$, was nicht gezeigt werden muß!*

b) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist genau dann ein Körper, wenn n eine Primzahl ist.

c) Für $a \in \mathbb{Z}$ ist $\overline{a}$ genau dann ein Nullteiler in R, wenn a und n nicht teilerfremd sind.

Aufgabe 4 (*7 Punkte*)
Gib je ein Beispiel für

a) eine nichtkommutative Gruppe.

b) eine kommutative Gruppe.

c) einen nichtkommutativen Ring.

d) einen kommutativen Ring, der nicht unitär ist.

e) einen kommutativen Ring, der nicht nullteilerfrei ist.

f) einen nichtkommutativen Körper.

g) einen Vektorraum.

Hinweis: *Vergiß nicht die Angabe der Verknüpfungen! Für einen kommutativen Körper genügt beispielsweise* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. *Beweise sind nicht nötig.*

Aufgabe 5 (*9 Punkte*)
Auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen seien eine Addition $\boxplus$ und eine Skalarmultiplikation $\boxdot$ mit rationalen Zahlen definiert durch

$$\begin{aligned} a \boxplus b &:= \sqrt[3]{a^3+b^3} \quad \text{für } a,b \in \mathbb{R} \\ r \boxdot a &:= \sqrt[3]{r} \cdot a \quad \text{für } r \in \mathbb{Q}, \quad a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) Zeige, daß $\mathbb{R}$ mit diesen Operationen ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist.

b) Ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ein Unterraum dieses $\mathbb{Q}$-Vektorraumes ?

Aufgabe 6 (*15 Punkte*)
Betrachte die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \binom{x}{y} \mapsto \binom{-3x+3y}{-2x+2y}$

a) Ist f ein Vektorraumhomomorphismus? Wenn ja, so gib die f entsprechende Matrix in den Standardbasen an.

b) Gib $\operatorname{Im} f$ und $\ker f$ an!

c) Was ist das Urbild von $(3b, 2b)$ für $b \in \mathbb{R}$?

d) Skizziere $\operatorname{Im} f, \ker f$ und $f^{-1}(3b, 2b)$.

e) Gib einen Isomorphismus $\operatorname{Im} f \to \mathbb{R}$ an und zeige $\mathbb{R}^2/\ker f$ ist isomorph zu $\mathbb{R}$.

Aufgabe 7 (*6 Punkte*)
Betrachte die Funktion

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : ((v_1, v_2), (w_1, w_2)) \mapsto v_1 w_2 - v_2 w_1.$$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen der linearen Abhängigkeit oder Unabhängigkeit der Zeilenvektoren $v = (v_1, v_2)$ und $w = (w_1, w_2)$ des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$ und dem Funktionswert $d(v, w)$?

Aufgabe 8 (*20 Punkte*)
Für eine Gruppe $(G, \cdot)$ ist die Automorphismengruppe $(\mathit{Aut}\ G, \circ)$ durch

$$\mathit{Aut}\ G := \{\varphi : G \to G \mid \varphi \text{ ist Isomorphismus}\}$$

definiert.

a) Zeige, daß die Hintereinanderausführung zweier Automorphismen ein Automorphismus ist.

b) Zeige, daß $\mathit{Aut}\,G$ mit der Komposition "$\circ$" als Gruppenverknüpfung tatsächlich eine Gruppe ist.

c) Zeige, daß $\varphi_g : G \to G : a \mapsto gag^{-1}$ für alle $g \in G$ ein Automorphismus ist.

d) Zeige, daß es einen natürlichen Homomorphismus $\varphi_G : G \to \mathit{Aut}\ G : g \mapsto \varphi_g$ gibt. Warum wäre es schlecht gewesen, hätte man φ_g durch $\varphi_g(a) := g^{-1}ag$ definiert?

e) Zeige, daß $\ker \varphi_G = \{g \in G \mid ag = ga \,\forall\, a \in G\}$ gilt. Offensichtlich ist dies eine Untergruppe von G. Sie heißt **Zentrum** $Z(G)$ von G.

f) Über welche wichtige Eigenschaft verfügt G im Falle $G = \ker \varphi_G$?

g) Berechne jeweils das Zentrum von $\mathfrak{S}_3$ und $(\mathbb{Z}/197\mathbb{Z}, +)$.

Beachte: Falls nicht anders angegeben, mußt Du alle Deine Aussagen beweisen!