Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

2. Klausur zur Linearen Algebra I, WS 1998/99

Aufgabe 1 *(3+3=6 Punkte)*

Sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Nenne zwei Kriterien, um zu überprüfen, ob eine Matrix $M \in M_{n,n}(\mathbf{K})$ regulär ist und wende eines davon auf die Matrix A an, d.h. teste, ob A invertierbar ist.

b) Löse das lineare Gleichungssystem $A^{-1}x = (1,-1,0)^T$ im Körper $\mathbb{F}_{13} := \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2 *(8 Punkte)*

Bestimme für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2t-8 & 1 & t \\ 2t-8 & 2t^2-1 & t+6 \\ 8-2t & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3 *(1+3+11+6=21 Punkte)*

Beantworte die folgenden Fragen und begründe/beweise Deine Aussagen ausführlich!

a) Sind die folgenden Aussagen richtig?

(i) Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ irgendein Skalarprodukt auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^n$, so gilt $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Definiert man $\langle x, y \rangle := x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$, so ist dadurch ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ erklärt.

b) Sei $V = \mathbb{R}^2$ versehen mit dem kanonischen Skalarprodukt. Welches der folgenden Tupel von Elementen aus V ist eine orthonormale Basis?

(i) $((1,-1),(-1,-1))$

(ii) $((-1,0),(0,-1))$

(iii) $((1,0),(0,1),(1,1))$

c) Gibt es einen Endomorphismus von $\mathbf{K}^2$ ohne Eigenwerte für

(i) $\mathbf{K} = \mathbb{R}$? *(Verweis auf die Vorlesung reicht nicht!)*

(ii) $\mathbf{K} = \mathbb{C}$?

(iii) $\mathbf{K} = \mathbb{F}_3 := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?

d) Eine Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ heißt **orthogonal**, wenn $A^{-1} = A^T$ gilt. Gelten die folgenden Implikationen?

(i) A orthogonal $\Rightarrow \det A \in \{\pm 1\}$

(ii) A orthogonal $\Longleftrightarrow \det A \in \{\pm 1\}$

(iii) A orthogonal $\Leftarrow \det A \in \{\pm 1\}$

Aufgabe 4 (*9+2+2=13 Punkte*)
Sei φ ein durch die Matrix

$$A := M(\varphi, (e_1, e_2, e_3), (e_1, e_2, e_3)) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -2 & -6 & 2 \\ -9 & -21 & 6 \end{pmatrix}$$

eindeutig beschriebener Endomorphismus des $\mathbb{R}^3$.

a) Berechne alle Eigenwerte von φ und die zu den Eigenwerten gehörenden Eigenräume.

b) Berechne jeweils eine Basis von $\operatorname{Im}\varphi$ und $\ker\varphi$.

c) Berechne Norm und Spur von φ.

Aufgabe 5 (*8 Punkte*)
Seien die Matrizen A und B aus $M_{n,n}(\mathbf{K})$ **ähnlich**, d.h. es gebe eine Matrix $C \in GL_n(\mathbf{K})$ mit $A = C \cdot B \cdot C^{-1}$. Dann haben A und B dasselbe charakteristische Polynom. Dies wurde bereits in der Vorlesung mittels Interpretation der Übergangsmatrix als Basiswechsel bewiesen.
Man kann dies jedoch auch direkt zeigen: Nimm an, daß $\operatorname{char}\mathbf{K} = 0$ gilt. Gilt $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbf{K}$, so sind beide Polynome identisch (*Das darfst Du glauben!*).
Zeige also unter Benutzung der Definition des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda) \qquad \forall\, \lambda \in \mathbf{K}.$$

Aufgabe 6 (*8 Punkte*)
Sei ein rechtwinkliges Dreieck in dem euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit Seitenlängen a, b, c gegeben, wobei c diejenige Seite ist, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt.
Zeige mit Mitteln der Vorlesung, daß der Satz des Pythagoras gilt!

Aufgabe 7 (*2+2+2=6 Punkte*)
Seien $F, G \in Hom(\mathbb{R}_2, \mathbb{R})$ mit $F(x) = a^T \cdot x = (a_1, a_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $G(x) = b^T \cdot x = (b_1, b_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

a) Zeige, daß $\Phi : \mathbb{R}_2 \times \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto F(x) \cdot G(y)$ eine Bilinearform ist.

b) Seien $a = (1, -1)$ und $b = (2, \lambda)$. Gibt es mindestens ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß Φ positiv semidefinit und symmetrisch ist?
(*Φ heißt positiv semidefinit, wenn $\Phi(x, x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_2$ gilt.*)

c) Seien a und b wie in Teil b). Gibt es mindestens ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß Φ ein Skalarprodukt von $\mathbb{R}_2$ ist?

Aufgabe 8 (*4+2+4=10 Punkte*)
Seien $E = \mathbb{R}_4$ mit dem Standardskalarprodukt und F der von den Vektoren $a_1 = (1, 0, 0, -1)^T$ und $a_2 = (0, 1, 0, 1)^T$ aufgespannte Untervektorraum von E.
Sei $\pi : E \to F$ die orthogonale Projektion von E auf $F \subset E$.

a) Zeige, daß $b_1 = (0, 0, 1, 0)^T$ und $b_2 = (1, -1, 0, 1)^T$ den Raum $F^\perp$ aufspannen. Zeige ferner, daß a_1, a_2, b_1, b_2 eine Basis von B bilden!

b) Bestimme eine Matrix von π bezüglich der Basis a_1, a_2, b_1, b_2 von E.

c) Berechne die Matrix von π bezüglich der Standardbasis von E.

Hinweis: $M(\pi, (a_1, a_2, b_1, b_2), (a_1, a_2, b_1, b_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Viel Erfolg und schöne Semesterferien!