Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

1. Übung zur Linearen Algebra I, WS 1998/99

Zur nächsten Aufgabe: *Man kann Mengen hinsichtlich ihrer Größe vergleichen, ohne sich des Zählens zu bedienen. Manche Naturvölker und auch Kinder bedienen sich zur Feststellung, ob in zwei Gefäßen gleich viele Murmeln, etc. sind folgender Methode: Aus jedem Gefäß wird jeweils eine Murmel herausgenommen bis eines der Gefäße leer ist. Sind beide Gefäße leer, so waren in ihnen gleich viele Murmeln.*
Dieses Prinzip der ***eineindeutigen*** *Zuordnung zwischen Objekten benutzt man auch in der Mathematik. Bei Mengen mit endlich vielen Elementen ist die Aufgabe einfach, aber wie ist es bei unendlich vielen Objekten? Ersteres wird in dieser Aufgabe beleuchtet, letzteres in Teil b) und in der Zusatzaufgabe* 9.

Aufgabe 5:*(4+2=6 Punkte)*

a) Es seien X und Y endliche Mengen mit der gleichen Anzahl von Elementen und $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen diesen Mengen. Zeige, daß f genau dann injektiv ist, wenn f surjektiv ist.

b) Gib jeweils ein Beispiel für eine Menge X und eine Abbildung $f : X \to X$ so daß f injektiv, aber nicht surjektiv ist, beziehungsweise f surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Aufgabe 6:*(5+2+2+1=10 Punkte)*
Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe.

a) Sei $\mathfrak{M}$ eine nichtleere Menge von Untergruppen von G. Zeige, daß $\bigcap\limits_{U\in\mathfrak{M}} U$ ebenfalls eine Untergruppe von G ist.

b) Warum darf in a) die Menge $\mathfrak{M}$ nicht leer sein?

c) Warum darf man den Beweis in a) nicht mit vollständiger Induktion führen? *(Eine Hilfe kann Aufgabe* 9 *sein.)*

d) Sei $M \subset G$ eine Teilmenge der Gruppe G. Dann ist durch

$$\langle M \rangle := \bigcap_{M\subset U\leq G} U$$

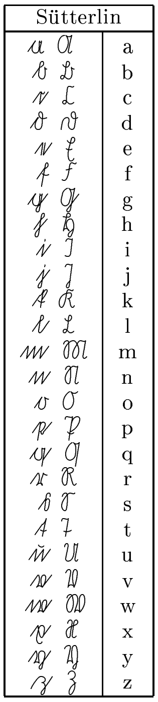
die *von M erzeugte Untergruppe* definiert. Zeige, daß es sich dabei wirklich um eine Gruppe handelt. (Die Schreibweise "$\leq$" bedeutet *"ist Untergruppe von"*.)

Aufgabe 7:*(7+1+2=10 Punkte)*
Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Man beweise die folgenden Rechenregeln (vgl. 1.6.2 aus der Vorlesung): Für alle $a, b \in G$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt

a) $a^{n+m} = a^n \circ a^m$ und $(a^n)^m = a^{nm}$

b) $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

c) Ist G kommutativ, gilt sogar $(a \circ b)^n = a^n \circ b^n$



Fraktur	
$\mathfrak{a}$ $\mathfrak{A}$	a
$\mathfrak{b}$ $\mathfrak{B}$	b
$\mathfrak{c}$ $\mathfrak{C}$	c
$\mathfrak{d}$ $\mathfrak{D}$	d
$\mathfrak{e}$ $\mathfrak{E}$	e
$\mathfrak{f}$ $\mathfrak{F}$	f
$\mathfrak{g}$ $\mathfrak{G}$	g
$\mathfrak{h}$ $\mathfrak{H}$	h
$\mathfrak{i}$ $\mathfrak{I}$	i
$\mathfrak{j}$ $\mathfrak{J}$	j
$\mathfrak{k}$ $\mathfrak{K}$	k
$\mathfrak{l}$ $\mathfrak{L}$	l
$\mathfrak{m}$ $\mathfrak{M}$	m
$\mathfrak{n}$ $\mathfrak{N}$	n
$\mathfrak{o}$ $\mathfrak{O}$	o
$\mathfrak{p}$ $\mathfrak{P}$	p
$\mathfrak{q}$ $\mathfrak{Q}$	q
$\mathfrak{r}$ $\mathfrak{R}$	r
$\mathfrak{s}$ $\mathfrak{S}$	s
$\mathfrak{t}$ $\mathfrak{T}$	t
$\mathfrak{u}$ $\mathfrak{U}$	u
$\mathfrak{v}$ $\mathfrak{V}$	v
$\mathfrak{w}$ $\mathfrak{W}$	w
$\mathfrak{x}$ $\mathfrak{X}$	x
$\mathfrak{y}$ $\mathfrak{Y}$	y
$\mathfrak{z}$ $\mathfrak{Z}$	z

Aufgabe 8: *(1+7+6=14 Punkte)*

Es sei $\mathfrak{S}_3$ die symmetrische Gruppe der Permutationen der Menge $\{1, 2, 3\}$.

a) Wie viele Elemente hat $\mathfrak{S}_3$?

b) Finde alle Elemente von $\mathfrak{S}_3$ und berechne die Gruppentafel von $\mathfrak{S}_3$. *(Eine Gruppentafel ist eine Multiplikationstabelle wie in Beispiel (3) aus 1.7.2 der Vorlesung.)*

c) Gib sechs Untergruppen von $\mathfrak{S}_3$ an. *(Nachweis!)*

Zur nächsten Aufgabe: *Diese Aufgabe ist freiwillig und gibt keine Zusatzpunkte. Sie bildet eine Fortführung der Aufgaben* 4 *und* 5.

Aufgabe 9*: *(0 Punkte)*

Wenn es zwischen den folgenden Mengen eine injektive, surjektive oder bijektive Abbildung gibt, so gebe sie an. Handelt es sich bei den Abbildungen um Homomorphismen, so gib auch Kern und Bild der Abbildung an!

(i) $f : \mathbb{N} \to G$ (ii) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ (iii) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ (iv) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Hierbei bezeichne $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, \cdots\}$, G die Menge der geraden natürlichen Zahlen $\{0, 2, 4, \cdots\}$, $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen $\{\cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$, $\mathbb{Q}$ die Menge der Brüche und $\mathbb{R}$ die Menge der reelen Zahlen.
Hinweis: Bei (iii) und (iv) muß kein strenger Beweis geführt werden! Versuche aber Deine Meinung zu begründen! Eine ausführlichere Betrachtung des Unterschieds zwischen *abzählbar* und *überabzählbar* unendlichen Mengen gibt es in der **Analysis Plus** Vorlesung (und in Forster, Analysis I, §9 Punktmengen).

Abgabe der Übungen ist am Freitag, 6.11.1998 vor der Vorlesung!

Wichtig: Dieses Übungsblatt nicht mit abgeben. Schreibe Deinen Namen, die Nummer Deiner Übungsgruppe und den Namen Deines Übungsgruppenleiters auf alle Deine Lösungsblätter und hefte diese zusammen. Wer eine Aufgabe abgibt, muß damit rechnen, diese in der Übungsgruppe an der Tafel vorzurechnen.

P.S. Wenn sich jemand durch die Anrede 'Du' gestört fühlt und lieber ein 'Sie' auf diesen Aufgabenblättern hätte, so möge der- oder diejenige dies einem Übungsgruppenleiter oder mir kundtun. Dies kann gerne auch anonym erfolgen.