Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

2. Übung zur Linearen Algebra I, WS 1998/99

Zur nächsten Aufgabe: *Zyklische Gruppen sind Gruppen, die nur von einem Element erzeugt werden und über 'schöne' Eigenschaften verfügen. In den nächsten beiden Aufgaben wirst Du sie näher kennenlernen.*
Es ist beispielsweise leicht zu zeigen, daß alle zyklischen Gruppen abelsch sind (selber nachrechnen oder in den vielen guten Mathebüchern in der Mathebibliothek nachschauen, etwa in Reiffen, Scheja, Vetter "Algebra"*).*

Aufgabe 10: *(1+4+2+1=8 Punkte)*

a) Ist $\mathbb{Z}$ eine zyklische Gruppe? (*Nachweis!*)

b) Wie viele Untergruppen hat $\mathbb{Z}$? Gib sie an!

c) Zeige, daß jede von $\{0\}$ verschiedene Untergruppe von $\mathbb{Z}$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.

d) Welche Untergruppen von $\mathbb{Z}$ sind normal?

Hinweis: $\mathbb{Z}$ *heißt* die unendliche *zyklische Gruppe.*

Aufgabe 11: *(5+4=9 Punkte)*

a) Es sei G eine endliche Gruppe mit p Elementen, wobei p eine Primzahl ist. Zeige, daß G dann zyklisch ist.

b) Zeige, daß eine endliche zyklische Gruppe bereits durch ihre Ordnung (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt ist, d.h. zwischen zwei solchen Gruppen derselben Ordnung existiert stets ein Isomorphismus.
Hinweis: *Wende den Homomorphiesatz auf einen Epimorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to G$ an, wobei G eine zyklische Gruppe ist.*

(*Dieses Resultat gilt auch, wie sich leicht zeigen läßt, für* die *unendliche zyklische Gruppe.*)

Aufgabe 12: *(5+2+2+4=13 Punkte)*

a) Zeige, daß $\mathfrak{S}_3$ nur die sechs Untergruppen hat, welche Du in Aufgabe 8 gefunden hast.
Hinweis: *Die Aufgabe 11 a) und die Gruppentafel aus Aufgabe 8 erleichtern das Leben!*

b) Welche Untergruppen von $\mathfrak{S}_3$ sind abelsch?

c) Bestimme alle inneren Automorphismen von $\mathfrak{S}_3$.

d) Welche Untergruppen von $\mathfrak{S}_3$ sind Normalteiler, welche zueinander konjugiert?

Zur nächsten Aufgabe: *Alle zwei Wochen wird es Aufgaben geben, die mit dem Mathematikprogramm* `Maple` *zu lösen sind. Dies ist die erste, deren eigentlicher Sinn es ist, in die Syntax der mapleeigenen Programmiersprache einzuführen.*
In der dieswöchentlichen Übungsgruppe solltest Du eine Kennung samt Paßwort für einen Rechner bekommen haben und bereits auf der Linearen Algebra-Homepage (`http://www.math.uni-sb.de/~agberger/ag-berger.html`) *gewesen sein. Am Ende jener Homepage ist ein Verweis auf eine spezielle Mapleseite für die Aufgaben dieses Semesters. Dort findest Du Informationen und -später- auch Musterlösungen.*

Aufgabe 13: *(1+2+2+5=10 Punkte)*

a) Mache den Mapleeinführungskurs in Hannover, auf den in der LA-Mapleseite verwiesen wird. (In Deiner letzten Übungsgruppe solltest Du eigentlich damit begonnen haben.)

b) In obigem Maplekurs wird der *Sieb des Eratosthenes* erwähnt. Schreibe ein kleines Mapleprogrämmchen, das dieses Verfahren benutzt und berechne damit alle Primzahlen kleiner als 999.
Hinweis: *Wer Teil a) sorgfältig machte, hat damit keine Probleme!*

c) Kann man mit diesem Verfahren alle Primzahlen finden, d.h. gibt es eine Zahl n, so daß alle Primzahlen kleiner als n sind?
Hinweis: *Um dies zu zeigen benötigst Du Maple nicht. Es reicht Schulwissen und daß sich alle natürlichen Zahlen eindeutig in Primfaktoren zerlegen lassen.*

d) Schreibe in Maple eine `Prozedur` zur Berechnung der Fibonaccizahlen. Benutze den `For`-Befehl, um die ersten 50 dieser Zahlen auszugeben. Schreibe eine weitere `For`-Schleife, um den Quotienten $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ zweier benachbarter Zahlen für $n < 50$ auszugeben. Was fällt Dir auf?

Abgabe der Übungen ist am Freitag, 13.11.1998 vor der Vorlesung!

Wichtig: Die Mapleaufgabe per ***E-Mail*** an Deinen Übungsgruppenleiter oder Deine Übungsgruppenleiterin schicken! Die Abgabe ist wie für die gewöhnlichen Aufgaben, d.h. Du mußt Deine Lösung vor Freitag, 13.11.1998, 11^{15} Uhr abgeschickt haben. Die E-Postadressen der ÜbungsgruppenleiterInnen findest Du auf der LA-Homepage!