Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

3. Übung zur Linearen Algebra I, WS 1998/99

Aufgabe 14:*(2+4+2+2=10 Punkte)*

a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten der Drehung und Spiegelung gibt es in einem regelmäßigen Fünfeck, so daß Eckpunkte wieder auf Eckpunkte abgebildet werden?

b) Die Menge dieser Spiegelungen und Drehungen in a) kann man zu einer Gruppe machen, indem man die Hintereinanderausführung als Gruppenoperation einführt. Weise die Gruppeneigenschaften nach! Diese Gruppe wird *Diedergruppe* D_5 genannt.

c) Gib zwei Elemente an, welche D_5 erzeugen! Ist D_5 zyklisch oder abelsch?

d) Welche Untergruppen hat D_5?

Hinweis: *Die Hauptschwierigkeit ist der Nachweis der Abgeschlossenheit unter der Gruppenoperation. Dies löst man entweder durch eine sehr große Gruppentafel oder indem man folgendes durchführt: 1.) Zeige, daß sich jede Drehung als mehrfache Hintereinanderausführung einer 'Einheitsdrehungen' und jede Spiegelung als Hintereinanderausführung einer Drehung und einer 'Einheitsspiegelung' schreiben lassen. 2.) Vereinfache das 'Produkt' zweier Gruppenelemente vermittels der Relation* $d \circ s = s^{-1} \circ d^{-1}$, *wobei* s *eine Spiegelung und* d *eine Drehung ist, um das 'Produkt' als Gruppenelement schreiben zu können.*

Aufgabe 15:*(3+3+4=10 Punkte)*
Seien $(G, \circ)$ und $(H, \heartsuit)$ Gruppen. Auf dem *Produkt* $G \times H$ definiert man durch

$$(g,h) * (\hat{g}, \hat{h}) := (g \circ \hat{g}, h \heartsuit \hat{h}) \quad \forall\, g, \hat{g} \in G \text{ und } \forall\, h, \hat{h} \in H$$

eine Verknüpfung $*$. Zeige, daß

a) $(G \times H, *)$ eine Gruppe ist.

b) $U := G \times \{e\}$ und $V := \{e\} \times H$ Normalteiler von $G \times H$ sind.

c) $(G \times H)/_U \simeq H$ und $(G \times H)/_V \simeq G$ gilt.

Aufgabe 16:*(4+3=7 Punkte)*
Es sei U eine Untergruppe der Gruppe G.

a) Zeige, daß es eine Bijektion zwischen der Menge der Linksnebenklassen und der Menge der Rechtsnebenklassen von G bezüglich U gibt, bei der aU auf Ua^{-1} abgebildet wird.

b) Sei jetzt $[G : U] = 2$. Zeige, daß U dann ein Normalteiler von G ist.

Aufgabe 17:*(2+4+2+2+2+1=13 Punkte)*
Gegeben seien die Permutationen $\sigma := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\tau := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

a) Welches Vorzeichen hat $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 17 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 18 \end{smallmatrix}\right)$?

b) Bestimme für σ und τ jeweils alle Inversionen, die Inversionszahl und das Vorzeichen.

c) Schreibe σ und τ als Produkt von Nachbarschaftstranspositionen.

d) Schreibt man σ und τ als Produkt beliebiger Transpositionen benötigt man weniger Transpositionen als in c)! Stimmt diese Aussage?

e) σ und τ sind Elemente der $\mathfrak{S}_5$. Welche Untergruppe erzeugen sie?

f) Wie viele Transpositionen enthält $\mathfrak{S}_n$?

Aufgabe 18*:*(0 Punkte)*

a) Es gibt keinen surjektiven Homomorphismus $\varphi : \mathbb{Z}/21\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und keinen injektiven in umgekehrter Richtung.

   Hinweis: *Benutze den Homomorphiesatz und Satz 1.8.5*

b) Gib ein Beispiel für einen Homomorphismus, der weder injektiv noch surjektiv ist.

Abgabe der Übungen ist am Freitag, 20.11.1998 vor der Vorlesung!

Wichtig: Eure Lösungen bitte pünktlich vor Beginn der Vorlesung abgeben! Auf jedes abgegebene Blatt ***Name, Zeit der Übungsgruppe*** und ***ÜbungsgruppenleiterIn*** schreiben. Gruppenabgabe ist ***nicht*** erlaubt! Jede und jeder muß die Aufgaben selber aufschreiben und abgeben!

Achtung **InformatikerInnen:** Ab sofort gibt es die allerneueste Mapleversion auch auf den Inforechnern! Der Aufruf erfolgt durch `/usr/local/maple/bin/xmaple`.