Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

5. Übung zur Linearen Algebra I, WS 1998/99

Aufgabe 23: *(6+5+1=12 Punkte)*

a) Bestimme alle Lösungen der folgenden Gleichungen in dem jeweils angegebenen Ring:

(i) $\bar{2}x + \bar{7} = \bar{5}$ in $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

(ii) $\bar{2}x + \bar{7} = \bar{5}$ in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

(iii) $\bar{2}x + \bar{3} = \bar{2}$ in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

b) Zeige die bekannte Teilbarkeitsregel für 3, d.h. zeige, daß eine natürliche Zahl genau dann durch 3 teilbar ist, wenn ihre Quersumme (d.h. Die Summe ihrer Ziffern im Dezimalsystem) durch drei teilbar ist.

Hinweis: *Wende den kanonischen Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ auf die in der Form $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i 10^i$ geschriebenen Zahlen an.*

Finde und beweise analoge Teilbarkeitsregeln für $2, 4, 5, 10$ und 11.

c) Wende die Regeln aus b) auf 106.590 an.

Aufgabe 24: *(6+2=8 Punkte)*

Verifiziere die Details von (3.10) aus der Vorlesung, d.h. zeige daß

a) $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ ein unitärer Ring ist.

b) $\varphi : (\mathbb{H}, +) \to (\mathbb{H}, +) : u \to \overline{u}$ ein Automorphismus ist.

Aufgabe 25: *(4+4=8 Punkte)*

Seien E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, U, V Untervektorräume von E und $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untervektorräumen von E. Zeige, daß $\bigcap_{i\in I} U_i$ und $U + V$ Untervektorräume von E sind.

Aufgabe 26: *(5+7=12 Punkte)*

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ die Menge aller $\mathbb{K}$-wertigen Folgen, d.h.

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \mid a_i \in \mathbb{K} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_0$$

a) Zeige, daß $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ mit der Vektoraddition

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}_0} := (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \text{ für alle } (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$$

und der Skalarmultiplikation

$$r \cdot (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} := (ra_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \text{ für alle } r \in \mathbb{K}, (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$$

ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

b) Welche der folgenden Teilmengen von $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ sind Untervektorräume von E ?

(i) $U_1 = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} \mid a_i \in \mathbb{Z} \text{ für alle } i\}$

(ii) $U_2 = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} \mid a_{11} = -1\}$

(iii) $U_3 = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} \mid a_i = 0 \text{ für fast alle } i\}$

(iv) $U_4 = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} \mid a_i = i^2 - i^3 + 76i \text{ für alle } i\}$

(v) $U_5 = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} \mid \text{es existiert ein } C > 0 \text{ mit } |a_i| \leq C \text{ für alle } i\}$

(vi) $U_6 = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} \mid a_i + a_{i+1} = a_{i+2} \text{ für alle } i\}$

(vii) $U_7 = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0} \mid \lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0\}$

Zur nächsten Aufgabe:

Zum ersten Advent gibt es eine gänzlich andere Zusatzaufgabe: Es handelt sich um eine alte Knobelaufgabe aus dem Nahen Osten. Der Teil b) der Aufgabe ist ein wenig zahlentheoretisch, aber nichtsdestoweniger mit Schulwissen lösbar.
Viel Spaß beim Zeitvertreib!

Aufgabe 27*: *(0 Punkte)*

a) Ein arabischer Kaufmann stirbt und hinterläßt seinen drei Söhnen 17 Kamele. In seinem Testament verfügte er, daß die Kamele unter seinen Erben im Verhältnis $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{9}$ aufgeteilt werden sollen. Ein armes Tier muß also 'gevierteilt' werden! Zum Glück -für das arme Kamel- findet der Testamentsvollstrecker eine Möglichkeit, die Erben korrekt auszubezahlen ohne ein Kamel zu töten. Wie stellt er dies an?

b) Finde das Prinzip hinter diesem Rätsel und überlege Dir, wieviele verschiedene Rätsel dieser Art es gibt.

Hinweis: *Überlege Dir, welche Bedingungen an die vier vorkommenden Zahlen gestellt werden.*

Abgabe der Übungen ist am Freitag, 4.12.1998 vor der Vorlesung!