Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

6. Übung zur Linearen Algebra I, WS 1998/99

Zur nächsten Aufgabe: Bei der Definition eines Vektorraums wurde in der Vorlesung ein Körper zugrundegelegt. Zur Formulierung der Axiome reicht aber auch ein kommutativer unitärer Ring R. Man spricht dann von einem **Modul** über R. Begriffe wie Linearkombination, Erzeugendensystem und lineare Unabhängigkeit kann man in dieser allgemeineren Situation analog erklären.
In den Beweisen der Vorlesung über Vektorräume und deren Eigenschaften wird gelegentlich durch Skalare dividiert, was in einem Ring nicht definiert ist. Manche Aussagen, welche für Vektorräume gelten, sind deshalb für Moduln im allgemeinen falsch.

Aufgabe 28: *(4+4=8 Punkte)*

a) Betrachte $\mathbb{Z}$ als Modul über sich selber (vgl. 4.3 (1)). Finde jeweils ein unverkürzbares Erzeugendensystem der Länge eins und zwei.

b) Gelten die drei in der Vorlesung für Vektorräume bewiesenen Grundsätze auch für Moduln? Begründe Deine Angaben (Gegenbeispiel)!

Aufgabe 29: *(4+7+1=12 Punkte)*

Im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $E = \mathbb{Q}^4$ seien die folgenden Teilmengen gegeben:

$$U := \Big\langle (1,1,-1,0), (1,0,-1,0), (-1,1,0,1) \Big\rangle,$$
$$F := \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_4 = 0, x_3 = -x_1\}, \quad G := \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_2 = x_4, x_1 + x_3 = -x_2\}.$$

a) Zeige, daß F, G Unterräume von U sind.

b) Bestimme Basen für die Untervektorräume U, F, G, $F \cap G$ und $F + G$.

c) Zeige, daß $F \cup G$ kein Untervektorraum ist.

Zur nächsten Aufgabe: *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt* **geometrisch**, *wenn kein Folgenglied null ist und der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gleich ist. Also läßt sich das n-te Folgenglied durch*

$$a_n = a_0 \cdot q^n$$

darstellen, wobei q der Quotient $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ für ein $i \in \mathbb{N}_0$ ist.

Aufgabe 30: *(10 Punkte)*

Eine Lucas-Folge ist eine Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ und $a_{i+2} = a_{i+1} + a_i$ für alle i. Die bereits früher vorgekommene Fibonacci-Folge ist also ein Spezialfall der Lucas-Folge.
$(f_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$, $(g_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ seien die Lucas-Folgen mit $f_0 = 0, f_1 = 1$ und $g_0 = 1, g_1 = 0$, d.h.

$$f = (0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,\dots) \quad \text{und} \quad g = (1,0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,\dots).$$

Man zeige:

a) Die Lucas-Folgen bilden einen Unterraum F des $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ und (f,g) ist eine Basis von F.

b) Es gibt genau zwei geometrische Folgen, die gleichzeitig auch Lucas-Folgen sind und diese bilden ebenfalls eine Basis von F.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

(Diesmal darf man den Beweis **nicht** mit vollständiger Induktion nach n führen!).

Aufgabe 31: *(8 Punkte)*

Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Zeige die folgenden Behauptungen

a) $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(v - w) = \varphi(v) - \varphi(w)$

b) $\varphi(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1\varphi(v_1) + \cdots \lambda_n\varphi(v_n)$ für $\lambda_i \in \mathbb{K}$ und $v_i \in V$.

c) Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie linear abhängiger Vektoren in V. Dann ist auch $(\varphi(v_i))_{i\in I}$ eine Familie linear abhängiger Vektoren in W.

d) Seien $V' \subset V$ und $W' \subset W$ Untervektorräume. Dann sind $\varphi(V') \subset W$ und $\varphi^{-1}(W') \subset V$ Untervektorräume.

e) $\dim \varphi(V) \leq \dim V$

f) Ist φ bijektiv, so ist $\varphi^{-1} : W \to V$ eine lineare Abbildung.

Zur nächsten Aufgabe: *Als zweipunktige Zusatzaufgabe gibt es heute eine kurze Mapleaufgabe als Fortführung der letzten Aufgabe über Primzahlen. Eine "richtige" Mapleaufgabe zur Linearen Algebra wird es erst nächste Woche geben.*

Aufgabe 32: *(2 Punkte)*

Es gab viele Versuche, Funktionen zu finden, welche als Funktionswerte nur Primzahlen haben. Zwei solcher Funktionen waren

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N} : x \mapsto x^2 + x + 41 \quad \text{und} \quad g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N} : x \mapsto x^2 + x + 17.$$

Beide wurden von Leonhard Euler im 18. Jahrhundert entdeckt. Untersuche mit Maple, inwiefern diese Funktionen die in sie gesetzten Hoffnungen erfüllen.

Hinweis: *Man kann zeigen, daß es keine ganzrationale Funktion gibt, welche ausschließlich Primzahlen als Werte aufweist.*

Informationen zur ersten Klausur

Die erste Klausur findet am 19. Dezember 1998 von 9-13 Uhr (nicht c.t.!) in den Hörsälen I,II und III statt. Wer zur Klausur zugelassen und in welchem Hörsaal der- oder diejenige schreiben wird, kann eine Woche vorher auf den aushängenden Listen eingesehen werden. Wer meint, sein Name würde zu unrecht fehlen, kann sich bei Holger Cröni (Zimmer 309) beschweren. Man bedenke jedoch, daß regelmäßige Anwesenheit in den Übungen Zulassungsbedingung war!
Zur Klausur sind mitzubringen: Personal- und Studierendenausweis, Papier und Stifte (keine roten und keine Bleistifte!). Als Hilfsmittel darf ein handgeschriebenes Din A4 Blatt mitgebracht werden (also kein Taschenrechner).
Ab Anfang nächster Woche wird es Musterlösungen zu den bisherigen Aufgaben geben, welche von der Bibliotheksaufsicht zum Zwecke des Kopierens ausgeliehen werden können. Außerdem wird es die Lösungen auch auf der LA-Homepage geben.

Abgabe der Übungen ist am Freitag, 11.12.1998 vor der Vorlesung!