Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

7. Übung zur Linearen Algebra I, WS 1998/99

Aufgabe 33*: *(0 Punkte)*

Gegeben sei die Permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_6$.

a) Bestimme alle Inversionen von σ, sowie die Inversionszahl $\mathrm{I}(\sigma)$, die Ordnung $\mathrm{ord}(\sigma)$ und das Vorzeichen (Signum) ε_σ.

b) Bestimme die Inversen der beiden Elemente σ und σ^2.

c) Schreibe σ als Produkt von Transpositionen.

Aufgabe 34*: *(0 Punkte)*

Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Teilmenge. Die Menge $N(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ heißt der **Normalisator** von H in G.

a) Zeige, daß $N(H)$ eine Untergruppe von G ist.

b) Zeige: $Z(G) \subseteq N(H)$. (Dabei bezeichne $Z(G) := \{g \in G \mid gx = xg \,\forall\, x \in G\}$ das **Zentrum** von G.)

c) Zeige: Ist H eine Untergruppe von G, so ist H ein Normalteiler von $N(H)$.

d) Bestimme den Normalisator von $H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ in der Gruppe $\mathfrak{S}_3$.

Aufgabe 35*: *(0 Punkte)*

Sei R ein kommutativer unitärer Ring der Charakteristik 2, d.h. es gilt $2 \cdot r = 0$ für alle $r \in R$. Sei $f: \ R \longrightarrow R$ die Abbildung mit $f(r) := r^2$. Zeige:

a) f ist ein Ringhomomorphismus.

b) Ist R sogar ein Körper, so ist f injektiv.
Hinweis: *Der Kern von f ist ein Ideal.*

c) Ist R sogar ein Körper mit nur endlich vielen Elementen, so ist f bijektiv.

Aufgabe 36*: *(0 Punkte)*
Gegeben seien folgende Teilmengen des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
M_a &= \{(x, x+1, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\
M_b &= \{(x, x+y, x) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\
M_c &= \{(x, 2x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\
M_d &= \{(x, xy, xy) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\
M_e &= \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R},\ x \geq y \geq z\}
\end{aligned}$$

Welche dieser Mengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$? (Beweise!) Gib für die Untervektorräume unter den Mengen jeweils eine Basis an.

Aufgabe 37*: *(0 Punkte)*
Sei M die Menge *aller* Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Für $f, g \in M$ und $r \in \mathbb{R}$ definieren wir:

$$f \oplus g:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}:\ x \mapsto f(x) + g(x) \text{ und } r \odot f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}:\ x \mapsto r \cdot f(x)$$

a) Zeige, daß $(\mathbb{R}, M, \oplus, \odot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

b) Sind die Elemente

$$\begin{aligned}
f_0 &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}:\ x \mapsto 1 \\
f_1 &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}:\ x \mapsto x \\
f_2 &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}:\ x \mapsto x^2
\end{aligned}$$

von M linear abhängig über $\mathbb{R}$? (Begründung!)

Dieses Übungsblatt dient als Vorbereitung auf die Klausur und geht nicht in die Punktewertung ein. Es wird jedoch korrigiert und in den Übungen besprochen.

Abgabe der Übungen ist am Freitag, 18.12.1998 vor der Vorlesung!