Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

8. Übung zur Linearen Algebra I, WS 1998/99

Aufgabe 38:*(5+2+5=12 Punkte)*
Für zwei Vektoren x und y des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$ definiert man durch

$$\langle x, y \rangle := x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$$

das **Skalarprodukt** von x und y.

a) Welche linearen Abbildungen respektieren das Skalarprodukt, d.h. für welche $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gilt $\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$? Benutze trigonometrische Funktionen, um diese linearen Abbildungen zu beschreiben!

b) Wie lassen sich diese Abbildungen geometrisch interpretieren?

c) Zeige, daß die Matrizen $A_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, A_3 := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, A_4 := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, A_5 := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ eine multiplikative Gruppe erzeugen, die isomorph zu einer schon früher vorgekommenen Gruppe ist.

   Hinweis: *Auf welche Punkte werden* $(1,0), (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ *und* $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ *abgebildet?*

Aufgabe 39:*(1+4+4=9 Punkte)*
Sei $n \geq 1$.

a) Gib ein Beispiel für eine nichtinvertierbare Matrix $A \in M_{7,7}(\mathbb{R})$.

b) Beweise die folgenden einfachen Aussagen über Matrizen $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$:

   (i) A, B invertierbar $\Rightarrow AB$ invertierbar und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
   (ii) $A + A^T$ ist symmetrisch
   (iii) A, B symmetrisch $\Rightarrow$ (AB symmetrisch $\Longleftrightarrow A, B$ kommutieren)
   (iv) $AB = BA \Longleftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : (A - \lambda I)$ und $(B - \lambda I)$ kommutieren.

c) Bilden die nachfolgenden Mengen einen Ring oder (Schief-)Körper? Ist dieser kommutativ, unitär oder nullteilerfrei?

   (i) $M_1 := \{A \in M_{n,n}(\mathbb{C}) | A \text{ ist invertierbar}\}$
   (ii) $M_2 := \{A \in M_{n,n}(\mathbb{C}) | \forall i, j \in \{1, \cdots, n\} : i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0\}$
   (iii) $M_3 := \{A \in M_{n,n}(\mathbb{C}) | A^{-1} = A^T\}$
   (iv) $M_4 := \{A \in M_{n,n}(\mathbb{C}) | \forall i, j \in \{1, \cdots, n\} : i \geq j \Rightarrow a_{ij} = 0\}$

Aufgabe 40:*(2+6+2+2=12 Punkte)*
Es seien die $\mathbb{Q}$-Vektorräume $E = \mathbb{Q}^2$ und $F = \mathbb{Q}^3$ gegeben. Mit (e_1, e_2) sei die Standardbasis von E bezeichnet, und mit (f_1, f_2, f_3) die Standardbasis von F (d.h. es gilt $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ sowie $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (0,1,0)$, $f_3 = (0,0,1)$). Weiter seien $a_1 = (1,1)$ und $a_2 = (0,2)$.

Die Abbildungen $\varphi_1, \varphi_2 : E \to F$ seien durch

$$\begin{aligned} \varphi_1((x_1,x_2)) &:= (x_1+2x_2, -x_1-x_2, 7x_2+x_1) \\ \varphi_2((x_1,x_2)) &:= (3x_2-x_1, -x_1-2, 7x_2+x_1) \end{aligned}$$

definiert.

a) Sind $\varphi_1, \varphi_2 : E \to F$ $\mathbb{Q}$-lineare Abbildungen? (Beweis!)

b) Falls φ_i für $i = 1$ oder $i = 2$ eine lineare Abbildung ist, bestimme

   (i) $M(\varphi_i, (e_1, e_2), (f_1, f_2, f_3))$, $M(\varphi_i, (e_2, e_1), (f_2, f_1, f_3))$ und $M(\varphi_i, (a_1, a_2), (f_1, f_2, f_3))$.

   (ii) jeweils eine Basis, sowie die Dimension von $\operatorname{Im}(\varphi_i)$ und $\ker(\varphi_i)$.

c) Gibt es eine lineare Abbildung $\psi : E \to F$ mit $\psi((1,2)) = (1,0,0)$, $\psi((1,1)) = (2,2,2)$ und $\psi((0,1)) = (1,0,1)$?

d) Gibt es eine lineare Abbildung $\lambda : E \to F$ mit $\lambda((1,2)) = (1,0,0)$ und $\lambda((1,1)) = (2,2,2)$?

Aufgabe 41:*(5+2=7 Punkte)*

a) Führe die Matrizenrechnungen von Aufgabe 38 c) mit Hilfe von `Maple` durch. Benutze das Lineare Algebra-Paket `linalg` und die Befehle `matrix` und `evalm`.

b) "Beweise" mit `Maple` für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ die Identität $(AB)^T = B^T A^T$ und zeige, daß $(AB) + (AB)^T$ symmetrisch ist.

   Hinweis: *Es gibt den Befehl* `transpose`.

Zur nächsten Aufgabe: *Zur Weihnachtszeit folgt noch eine ganz und gar nicht weihnachtliche Geschichte aus heißen Gefilden. Sie ist nur zur Erbauung und muß nicht mit Linearer Algebra gelöst werden!*

Aufgabe 42*:*(0 Punkte)*
Ein Mann, der in der Wüste lebt, schickt seinen Diener aus, vier Kilometer von seinem Haus entfernt eine Fahne aufzupflanzen. Um zu überleben, muß der Diener auf jeder Meile einen Liter Wasser trinken, aber er kann nur fünf Liter auf einmal mitnehmen. Da sie in der Wüste leben, müssen sie mit Wasser sparsam umgehen.
Wie kann der Diener vier Kilometer zurücklegen, die Fahne aufpflanzen, wieder heimkehren und dabei so wenig Wasser wie möglich trinken?

Klausurhinweise:
Ort: Hörsäle I, II und III
Zeit: Samstag, 19.12.1998 von 9:00 bis 13:00 Uhr
Mitzubringen: Personal- und Studierendenausweis, Papier und Stifte
(optional: Din A4 Blatt mit Notizen)

Viel Erfolg bei der Klausur, Frohe Weihnachten und ein Gutes Neues Jahr!

Abgabe der Übungen ist am Freitag, 15.1.1999 vor der Vorlesung!