Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

9. Übung zur Linearen Algebra I, WS 1998/99

Aufgabe 43: *(2+6=8 Punkte)*

a) Berechne alle Potenzen $A^2, A^3, \cdots$ der reellen Matrix $A = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1 \\ 0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$.

b) Seien $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ eine Matrix, bei der höchstens oberhalb der Hauptdiagonalen von Null verschiedene Einträge stehen. Zeige, daß A^n die Nullmatrix ist.

Aufgabe 44: *(4+4=8 Punkte)*

a) Gegeben seien ein Körper $\mathbb{K}$ und eine $n \times n$-Matrix A mit Einträgen aus $\mathbb{K}$. Zeige, daß A genau dann invertierbar ist, wenn A^T invertierbar ist. Zeige weiter, daß in diesem Fall $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ gilt.

b) Invertiere die reelle Matrix $B = \begin{pmatrix} -1&-1&2 \\ -3&2&1 \\ -5&-1&2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 45: *(7+7=14 Punkte)*
Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

a) Zeige, daß $\tilde{\epsilon} = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7\\2\\1\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix} \right\}$ und $\tilde{\delta} = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\3\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\3\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\1\\-1 \end{pmatrix} \right\}$ Basen des $\mathbb{K}^4$ bzw. $\mathbb{K}^3$ sind.

b) Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 0&2&2&0 \\ 1&-1&1&-1 \\ 3&0&-1&5 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1&0&1&0 \\ 0&0&1&-1 \\ 0&1&2&6 \end{pmatrix}$.

Die linearen Abbildungen φ und ψ seien durch $\varphi(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{K}^4$ und $M(\psi, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta}) = B$ gegeben.

(i) Berechne die Matrix von φ bezüglich der Basen $\tilde{\epsilon}$ und $\tilde{\delta}$.
(ii) Berechne die Matrix von ψ bezüglich der Standardbasen des $\mathbb{K}^4$ und $\mathbb{K}^3$.
(iii) Berechne jeweils eine Basis von $\operatorname{Im} \varphi$ und $\operatorname{Im} \psi$.
(iv) Bestimme die Dimensionen der Bilder und der Kerne von φ und ψ.

Aufgabe 46: *(10 Punkte)*
Bestimme alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&1&1 \\ 0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&1&1&0&1 \\ 1&1&1&0&1&0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}$$

a) über dem Körper $\mathbb{R}$.

b) über dem Körper $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

c) über dem Körper $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Abgabe der Übungen ist am Freitag, 22.1.1999 vor der Vorlesung!