Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

10. Übung zur Linearen Algebra I, WS 1998/99

Aufgabe 47:*(2+4+2=8 Punkte)*

a) Zeige, daß die Menge $\mathcal{R} := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix} \right) | a, b \in \mathbb{R} \right\}$ einen Unterring des Matrizenrings $M_{2,2}(\mathbb{R})$ bildet.

b) Gib einen Ringisomorphismus von $\mathbb{C}$ nach $\mathcal{R}$ an.

c) Gib zwei verschiedene Matrizen $A \in \mathcal{R}$ an, für die $A^6 = I$ gilt. Wieviele weitere Matrizen gibt es noch mit dieser Eigenschaft?

Aufgabe 48:*(4+3+5=12 Punkte)*
Berechne mittels des Gaußverfahrens die Determinanten der Matrizen

a) $A := \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$

b) $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $C_n := \Big(c_{ij} := (i-1)n + j \Big)_{i,j \in \{1, \cdots, n\}}$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Aufgabe 49:*(10 Punkte)*
Seien der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $E = \mathbb{Q}^3$ mit der Standardbasis e_1, e_2, e_3 und eine beliebige Determinantenfunktion

$$\Delta : E \times E \times E \to \mathbb{Q}$$

von E gegeben. Berechne $\Delta\Big((1,2,3), (4,-3,1), (-1,2,5)\Big)$ in Abhängigkeit von $\Delta(e_1, e_2, e_3)$.

Zur nächsten Aufgabe: *Magische Quadrate waren zu allen Zeiten Objekte der Faszination. Es handelt sich hierbei um ein quadratisches Schema mit $n \times n$ Kästchen, in denen die Zahlen $1, 2, \cdots, n^2$ stehen und das die folgenden Eigenschaften hat: Es gibt eine Zahl $\Sigma := \frac{n}{2}(n^2+1)$, so daß gilt:*

- *In jeder Zeile ist die Summe aller Elemente dieser Zeile Σ.*
- *In jeder Spalte ist die Summe aller Elemente dieser Spalte Σ.*
- *In jeder Diagonalen ist die Summe aller Elemente dieser Diagonalen Σ.*

Es gibt für magische Quadrate ungerader Ordnung (d.h. n ungerade) mehrere einfache Verfahren, ein solches Quadrat zu erzeugen. Bei solchen gerader Ordnung ist es ungleich schwerer.

In der nächsten Aufgabe geht es nicht darum, ein solches Verfahren zu finden, sondern das Problem der Vervollständigung eines magischen Quadrates in die Sprache der linearen Algebra zu übersetzen, d.h. Gleichungen in Matrizenschreibweise zu finden und das so entstandene Problem mit Hilfe von Maple zu lösen, also insbesondere alle *Lösungen zu finden!*

Aufgabe 50:*(10 Punkte)*
Ersetze in dem Quadrat

?	?	?
?	?	9
?	?	?

die Fragezeichen so durch die Zahlen von eins bis acht, daß die drei Zeilensummen, drei Spaltensummen und die beiden Diagonalensummen jeweils den Wert 15 haben.

Hinweis: *Es gibt sicherlich mehrere Möglichkeiten, die Aufgabe zu bearbeiten. Einen Weg skizziere ich nachfolgend.*
Um den Lösungsaufwand möglichst gering zu halten, ist es am besten, wenn Du die Befehle `seq` *und* `indets` *benutzt, um die Matrix mit Unbestimmten zu füllen. Erzeuge mittels* `Zeilensumme:= convert(AUSDRUCK,list)` *Listen mit den geforderten Gleichungen. Löse die so geschaffenen Gleichungen mit Hilfe von* `solve` *und* `op`.
Damit nur positive Zahlen als Lösung erscheinen, solltest Du mittels `unapply` *und* `seq` *eine vektorwertige Funktion definieren, welche Lösungen erzeugen, die Du dann auf positive Werte testen kannst. Da nur die ersten 8 natürlichen Zahlen als Lösung in Frage kommen, mußt Du mit* `select` *die Ergebnisse Deines Funktionsaufrufes als Liste extrahieren und mit der Menge* `1,2,...,8` *vergleichen.*

Es wurde mehrfach der Wunsch geäußert, einige Bücher über Lineare Algebra zu nennen. Hier ist eine persönliche Auswahl:

Werner Greub, ***Linear Algebra***
Gerd Fischer, ***Lineare Algebra***
Klaus Jänich, ***Lineare Algebra***
Rolf Walter, ***Einführung in die Lineare Algebra***
D. Wille, M. Holz, ***Repetitorium der Linearen Algebra*** *(2 Bände)*

Zwei weitere Bücher, welche der Erwähnung verdienen sind

B.L. van der Waerden, ***A History of Algebra***
Keith Devlin, ***Sternstunden der modernen Mathematik***

Van der Waerden beschreibt in seinem Buch die Entwicklung der Algebra von den Anfängen bis ungefähr 1930. Im ersten Drittel behandelt er die Entwicklung von Lösungsverfahren für lineare Gleichungen.
Devlin schildert in seinem für interessierte Laien geschriebenen Buch moderne (Teil-)Lösungen für alte und neue Probleme. Er berichtet über Probleme aus vielen Bereichen der Mathematik, was zugleich eine sehr leicht verständliche Einführung in die vielfältigen Zweige der Mathematik beinhaltet.

Abgabe der Übungen ist am Freitag, 29.1.1999 vor der Vorlesung!