Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

11. Übung zur Linearen Algebra I, WS 1998/99

Aufgabe 51:*(5+3=8 Punkte)*
Für einen Körper $\mathbb{K}$ und ein $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet $GL(n, \mathbb{K})$ die Gruppe der invertierbaren Matrizen aus $M_{n,n}(\mathbb{K})$. Weiter sei $M_{n,n}(\mathbb{Z}) := \{(a_{i,j}) \in M_{n,n}(\mathbb{Q}) \mid a_{i,j} \in \mathbb{Z} \text{ für alle } i, j\}$. Zeige:

a) Für $A \in GL(n, \mathbb{Q}) \cap M_{n,n}(\mathbb{Z})$ gilt: $\quad A^{-1} \in M_{n,n}(\mathbb{Z}) \Longleftrightarrow \det A \in \{\pm 1\}$.

b) $U := \{A \in M_{n,n}(\mathbb{Z}) \mid \det A \in \{\pm 1\}\}$ ist eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{Q})$.

Aufgabe 52:*(3+3+3=9 Punkte)*
Berechne die Determinanten der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R}) \text{ und } B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 0 & i & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{C})$$

a) mit dem Gaußalgorithmus

b) durch Entwicklung nach der ersten Zeile

c) durch Entwicklung nach der zweiten Spalte.

Aufgabe 53:*(5+3+5=13 Punkte)*
Sei $A \in GL(n, \mathbb{K})$ und $b \in \mathbb{K}^n$. Das Gleichungssystem $Ax = b$ besitzt also die Lösung $x = A^{-1}b$.

a) Beweise die Cramersche Regel mit Hilfe der Formel $A^{-1} = (\det A)^{-1} ad(A)$.

b) Beweise umgekehrt mit Hilfe der Cramerschen Regel die Formel $A^{-1} = (\det A)^{-1} ad(A)$.

c) Berechne mittels der Cramerschen Regel die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + 2i \cdot z &= 1 - 2i \\ i \cdot y + z &= -2 \\ i \cdot x + y + z &= 2i - 1 \end{aligned}$$

im Körper $\mathbb{C}$. Ist die Berechnung der Lösung mit dem Gaußalgorithmus einfacher?

Aufgabe 54:*(4+2+4=10 Punkte)*
Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die durch die Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gegebene lineare Abbildung, d.h. $A = M(\varphi, (e_1, e_2, e_3), (e_1, e_2, e_3))$.

a) Berechne alle Eigenwerte von φ und die zugehörigen Eigenräume.

b) Berechne die Norm und die Spur von φ.

c) Bestimme eine Basis v_1, v_2, v_3 von $\mathbb{R}^3$, welche aus den Eigenvektoren von φ besteht und berechne $B = M(\varphi, (v_1, v_2, v_3), (v_1, v_2, v_3))$.

Zur nächsten Aufgabe:

"Eines Tages im Oktober 1852, kurz nach Beendigung seines Studiums, war der junge Mathematiker Francis Guthrie damit beschäftigt, eine Landkarte der englischen Grafschaften zu kolorieren. Bei dieser Tätigkeit kam ihm plötzlich der Gedanke, daß die Anzahl der Farben, die maximal nötig ist, um eine beliebige Landkarte zu kolorieren, mit hoher Wahrscheinlichkeit vier betragen muß; Bedingung dabei ist, daß zwei aneinandergrenzende Grafschaften nicht mit der gleichen Farbe koloriert werden dürfen (jedoch ist eine gemeinsame Ecke zugelassen, denn sonst gäbe es keine obere Farbanzahlgrenze!). Da es ihm nicht gelang, diese Vermutung zu beweisen, schrieb er an seinen Bruder, der das Problem an seinen Mathematikprofessor Augustus de Morgan weiterleitete ...
Erst im Jahre 1976 konnte das Problem mit Computerunterstützung(!!) gelöst werden.
Die Aussagen der folgenden Aufgabe waren bereits de Morgan bekannt. Versuche sie zu beweisen!

Aufgabe 55*:*(0 Punkte)*

a) Man braucht mindestens vier Farben, um eine Karte zu kolorieren.

b) Ein häufiger Beweis für den Vierfarbensatz war: "Fünf Länder können unmöglich eine solche Position in einer Karte einnehmen, daß jedes Land mit jedem der vier anderen eine gemeinsame Grenze besitzt. Deswegen reichen vier Farben aus!"

   Diese Schlußfolgerung ist jedoch falsch!

   Finde eine Karte, in der Du keine vier Länder so auswählen kannst, daß jedes der vier Länder eine gemeinsame Grenze mit jedem der drei anderen besitzt; und für deren Kolorierung Du mehr als drei Farben brauchst.

Abgabe der Übungen ist am Freitag, 5.2.1999 vor der Vorlesung!