Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

12. Übung zur Linearen Algebra I, WS 1998/99

Aufgabe 56:*(8+1=9 Punkte)*

a) Welche der folgenden Funktionen sind Determinantenfunktionen?

$$\Phi_1 : \mathbb{R}_2 \times \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x,y) \mapsto x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y$$

$$\Phi_2 : \mathbb{R}_2 \times \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x,y) \mapsto x^T \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y$$

$$\Phi_3 : \mathbb{R}_2 \times \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x,y) \mapsto x^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y + (3\ 3)y$$

$$\Phi_4 : \mathbb{R}_2 \times \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x,y) \mapsto x^T \begin{pmatrix} 0 & -42 \\ 42 & 0 \end{pmatrix} y$$

b) Eine nichttriviale Determinantenfunktion auf dem $\mathbb{R}_2$ unterscheidet sich von der "Standarddeterminantenfunktion" des $\mathbb{R}_2$ nur durch einen konstanten Faktor. Bestimme diesen Faktor für die Determinantenfunktionen aus a).

Aufgabe 57:*(10 Punkte)*
Seien $\varphi : E \to E$ ein Endomorphismus des n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums E und Δ eine nichttriviale Determinantenfunktion auf E. Beweise, daß dann für beliebige $x_1, \cdots, x_n \in E$

$$\tilde{\Delta}(x_1, \cdots, x_n) := \sum_{k=1}^{n} \Delta(x_1, \cdots, \varphi(x_k), \cdots, x_n) = \text{ Spur } (\varphi) \cdot \Delta(x_1, \cdots, x_n)$$

gilt.
Hinweis: *Zeige diese Aussage zunächst für eine Basis $a_1, \cdots, a_n$ von E. Beweise dann, daß $\tilde{\Delta}(x_1, \cdots, x_n)$ eine Determinantenfunktion von E ist und wende 8.3.1 an.*

Aufgabe 58:*(3+2+4+1=10 Punkte)*
Sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $E := Mat_{2,2}(\mathbb{R})$ mit der Skalarmultiplikation $\lambda\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{smallmatrix}\right)$ gegeben. Ferner sei die Abbildung

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R} : (A,B) \mapsto \text{Spur}(A \cdot B^T)$$

definiert.

a) Zeige, daß $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum ist.

b) Bestimme die Dimension von E.

c) Sei $U \subset E$ der von $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ erzeugte Unterraum. Bestimme eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$. Gilt $E = U \oplus U^\perp$? Bestimme $(U^\perp)^\perp$.

d) Bestimme den Winkel zwischen den Vektoren A und B.

Aufgabe 59:*(7+3+1=11 Punkte)*
Je drei in einer Ebene liegende Punkte $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ liegen auf einem Kreis, dessen Gleichung in x und y durch

$$\det \begin{pmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ a_1^2+a_2^2 & a_1 & a_2 & 1 \\ b_1^2+b_2^2 & b_1 & b_2 & 1 \\ c_1^2+c_2^2 & c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

gegeben ist. Sie liegen auf einer Geraden, wenn

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

gilt.

a) Schreibe in Maple eine Prozedur zur Berechnung des durch drei Punkte gegebenen Kreises, welche Kreisgleichung, Mittelpunkt und Radius des Kreises ausgibt.

b) Zeichne den Kreis in Maple mit der Mapleroutine `plots`.

c) Berechne als konkrete Beispiele $a = (1,1), b = (2,1), c = (3,2)$ und $a = (3,4), b = (4,5), c = (6,7)$.

Hinweis: *Nutze die Maplefunktionen `det` und `minor`.*

Informationen zur zweiten Klausur

Die zweite Klausur findet am 20. Februar 1999 von 9-13 Uhr (nicht c.t.!) in den Hörsälen I,II und III statt. Der Stoff der Vorlesung ab *§4 Vektorräume* ist Inhalt der Klausur. Wer zur Klausur zugelassen und in welchem Hörsaal der- oder diejenige schreiben wird, kann am Mittwoch vorher auf den aushängenden Listen eingesehen werden. Zugelassen ist, wer in den Übungsblättern 0 bis 12 ingesamt $11 \cdot 40 \cdot 0,4 = 176$ Punkte erreicht und regelmäßig in den Übungen mitwirkte.
Wer meint, sein Name würde zu unrecht fehlen, kann sich bei Holger Cröni (Zimmer 309) beschweren.
Zur Klausur sind mitzubringen: Personal- und Studierendenausweis, Papier und Stifte (keine roten und keine Bleistifte!). Als Hilfsmittel darf ein handgeschriebenes Din A4 Blatt mitgebracht werden (also kein Taschenrechner).

Die Nachklausur wird am 10. April 1999 zur üblichen Zeit stattfinden.

Abgabe der Übungen ist am Freitag, 12.2.1999 vor der Vorlesung!