Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

13. Übung zur Linearen Algebra I, WS 1998/99

Aufgabe 60: *(0 Punkte)*

Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V_1, V_2, V_3, V_4 endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\mathcal{O}$ der triviale $\mathbb{K}$-Vektorraum, der nur aus dem Nullelement besteht.
Seien ferner $\mathbb{K}$-lineare Abbildungen

$$\mathcal{O} \xrightarrow{f_1} V_1 \xrightarrow{f_2} V_2 \xrightarrow{f_3} V_3 \xrightarrow{f_4} V_4 \xrightarrow{f_5} \mathcal{O}$$

mit $\ker(f_{i+1}) = \operatorname{Im}(f_i)$ für $i \in \{1,2,3,4\}$ gegeben.
Zeige, daß dann

$$\dim V_1 + \dim V_3 = \dim V_2 + \dim V_4$$

gilt.
Hinweis: *Wie **müssen** die $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen f_1 und f_5 aussehen?*

Aufgabe 61: *(0 Punkte)*

Sei $E := Abb(\mathbb{N}_0, \mathbb{R})$ die Menge der Abbildungen von $\mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{R}$. Mittels der Addition $+ : E \times E \to E$ und der Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times E \to E$, die wie üblich durch $(f+g)(i) := f(i) + g(i)$ und $(\lambda \cdot f)(i) := \lambda f(i)$ für beliebige $f, g \in E$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ definiert sind, wird E zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Zeige, daß

a) $U := \{f \in E | f(i) \neq 0$ für höchstens endlich viele $i\}$ ein $\mathbb{R}$-Unterraum von E ist.

b) $\{f_j | j \in \mathbb{N}_0\}$ mit $f_j : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R} : i \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$ eine Basis von U, aber nicht von E ist.

c) die Aussage "*Seien $\mathbb{K}$ ein Körper, F ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi : F \to F$ eine $\mathbb{K}$-lineare und surjektive Abbildung. Dann ist φ auch injektiv.*" falsch ist.

Aufgabe 62: *(0 Punkte)*

Betrachte das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a & 2a & 3a \\ 1 & 1 & a \\ 5a & a & 6a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$. Für welche Werte von a hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung? Mehrere Lösungen? Keine Lösung?

Aufgabe 63: *(0 Punkte)*
Seien $E := \mathbb{R}_3$ und die Abbildung $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right)\right) := x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2 x_2 y_2 + 7 x_3 y_3 \qquad \forall\, x_i, y_i \in \mathbb{R}$$

gegeben. Zeige, daß (E, φ) ein euklidischer Vektorraum ist und bestimme die Norm des Vektors $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ in diesem euklidischen Vektorraum.

Informationen zur zweiten Klausur

Da Ute nächste Woche nicht mehr hier ist, finden ihre Übungen wie folgt statt: Die Morgengruppe übernimmt Thorsten Brachmann (Zeichensaal) und die Nachmittagsgruppe Frederic Boldt (Hörsaal IV).
Verbesserung: Auf dem letzten Übungsblatt stand geschrieben, daß 192 Punkte für die Zulassung zur Klausur benötigt werden. Unter den 13 bisherigen Übungsblättern gab es jedoch zwei ohne Bewertung, so daß nur **176** Punkte benötigt werden.
Noch ein **Hinweis**: Es lohnt sich immer, die bisher schon bearbeiteten Aufgaben noch einmal anzusehen!!

Abgabe der Übungen ist am Freitag, 19.2.1999 vor der Vorlesung!

Dieses Übungsblatt dient als Vorbereitung auf die Klausur und geht nicht in die Punktewertung ein. Es kann jedoch abgegeben werden und wird dann korrigiert und in den ersten Übungen des nächsten Semesters besprochen.