Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

Musterlösung zur 3. Übung der Linearen Algebra I, WS 1998/99

Lösung zur Aufgabe 14:

a) Es gibt die fünf Drehungen d_i um $\frac{2\pi n}{5}$ mit $1 \leq n \leq 5$; und fünf Achsenspiegelungen s_i, wobei die Spiegelachse durch jeweils einen Eckpunkt geht. Dies sind alle 10 Möglichkeiten. Kombinationen führen immer wieder auf diese (s. Teil b))

b) Die geometrischen Operationen können (müssen aber nicht!) als Elemente der $\mathfrak{S}_5$ geschrieben werden: Die 'kleinste' Drehung entspricht der Permutation $d := d_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Jede weitere Drehung ist als Potenz von d darstellbar: $d_i = d^i$. Eine Spiegelung mit 1 als Fixpunkt ist durch $s := s_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ gegeben. Negative Exponenten lassen sich auf kanonische Weise interpretieren. Jede weitere Spiegelung läßt sich als Kombination einer Spiegelung mit einer Drehung darstellen: $s_2 = d^2 s, s_3 = d^4 s, s_4 = ds$ und $s_5 = d^3 s$ (*Nachrechnen!*).

Nachweis der Gruppenaxiome: Das schwierigste ist der Nachweis der Abgeschlossenheit unter der Gruppenoperation. Formal ist das etwas umständlich. Eine Möglichkeit ist die folgende: Daß die Hintereinanderausführung von Drehungen wieder eine Drehung ist klar. Ziemlich leicht ist auch, daß die Verkettung einer Drehung mit einer Spiegelung und die Verkettung einer Spiegelung mit einer Drehung als eine einzige Spiegelung geschrieben werden kann. Das Hauptproblem ist die Verkettung zweier Spiegelungen. Um zu zeigen, daß dies eine Drehung ist, benötigt man $s = s^{-1}$ und $ds = s^{-1}d^{-1}$. Dann kann ich das Produkt zweier Spiegelungen als $(d^i s)(d^j s)$ schreiben. Es folgt für $i, j \geq 1$:

$$(d^i s)(d^j s) = d^i (sd) d^{j-1} s = d^i (d^{-1} s^{-1}) d^{j-1} s = d^{i-1} s d^{j-1} s.$$

Diesen Prozeß führt man fort bis die zweite Potenz von d verschwindet, woraufhin $d^{i-j} s^2 = d^{i-j}$ übrig bleibt, was zu zeigen war. Der Rest geht schnell:

Assoziativität: klar!
Neutralelement: $d^5 = e$ ist es!
Inverses: Jede Spiegelung ist zu sich selbst invers und für eine Drehungen d^i gilt: $d^i d^{5-i} = d^5 = e$

Die Diedergruppe D_5 ist durch die Relationen $d^5 = e = s^2$ und $sds = d^{-1}$ bereits eindeutig bestimmt!

c) Die obigen Elemente d und s erzeugen D_5 (Begründung s.o.). D_5 ist **nicht zyklisch**, da es kein Element von Ordnung 10 gibt. Anders argumentiert: Mit einer Drehung kann man nur 5 verschiedene Element erzeugen, da eine Drehung die Orientierung erhält. Eine Spiegelung vertauscht die Orientierung und ist zu sich selbst invers. Die Gruppe ist **nicht abelsch**: $d \circ s \neq s \circ d$.

d) Die Ordnung von D_5 ist 10, d.h. es gibt eine Untergruppe der Ordnung 1 ($\langle e \rangle$), fünf der Ordnung 2 ($\langle s_i \rangle$), eine der Ordnung 5 ($\langle d_i \rangle$ für irgendein $i \in \{1, 2, 3, 4\}$) und eine der Ordnung 10 (D_5).

Lösung zur Aufgabe 15:

a) Gruppenaxiome nachrechnen: Wohldefiniertheit der Verknüpfung, Assoziativität, Neutralelement, Inverse

b) Sei $(g,h) \in G \times H$. Dann gilt

$$(g,h) * U * (g,h)^{-1} = (g,h) * G \times \{e\} * (g^{-1}, h^{-1}) = (g \circ G \circ g^{-1}) \times (h \heartsuit e \heartsuit h^{-1}) = G \times \{e\} = U$$

und

$$(g,h) * V * (g,h)^{-1} = (g,h) * \{e\} \times H * (g^{-1}, h^{-1}) = (g \circ \{e\} \circ g^{-1}) \times (h \heartsuit H \heartsuit h^{-1}) = \{e\} \times H = V.$$

c) Betrachte die kanonischen Projektionen:

$$\varphi : G \times H \to G : (g,h) \mapsto g \quad \text{und} \quad \psi : G \times H \to H : (g,h) \mapsto h$$

Wir müssen Isomorphismen finden:
Homomorphismen: Seien (g,h) und $(\hat{g}, \hat{h})$ Elemente von $G \times H$. Dann gilt

$$\varphi\Big((g,h) * (\hat{g}, \hat{h})\Big) = \varphi(g \circ \hat{g}, h \heartsuit \hat{h}) = g \circ \hat{g} = \varphi(g,h) \circ \varphi(\hat{g}, \hat{h})$$

und analog für ψ.
Surjektiv: Ist trivialerweise klar.
Kern: $\ker \varphi = \{(g,h) | \varphi(g,h) = e\} = \{(g,h) | g = e\} = V$ und $\ker \psi = \{(g,h) | \psi(g,h) = e\} = \{(g,h) | h = e\} = U$
Nun folgt aus dem Homomorphiesatz

$$G = \operatorname{Im} \varphi \cong (G \times H)/\ker \varphi = (G \times H)/V$$
$$H = \operatorname{Im} \psi \cong (G \times H)/\ker \psi = (G \times H)/U$$

was zu zeigen war.

Lösung zur Aufgabe 16:

a) Sei U ein Untergruppe der Gruppe G. Schreibe ${}_UG := \{aU | a \in G\}$ für die Menge der Linksnebenklassen von G bezüglich U und $G_U := \{Ua | a \in G\}$ für die Menge der Rechtsnebenklassen von G bezüglich U. Betrachte die Abbildung

$$\varphi : {}_UG \to G_U : aU \mapsto Ua^{-1}.$$

Es ist zu zeigen, daß diese Abbildung bijektiv ist.
Sie ist *wohldefiniert*, da für $a, b \in G$

$$aU = bU \iff U = a^{-1}bU \iff a^{-1}b \in U \iff Ua^{-1}b = U \iff Ua^{-1} = Ub^{-1}$$

gilt (vgl. 1.8.3). Liest man diese Äquivalenzkette von rechts nach links, so ergibt sich die *Injektivität*. Die Abbildung ist auch *surjektiv*, da jedes Gruppenelement über ein Inverses verfügt. Insbsondere ist die Abbildung also *bijektiv*.

Für $[G : U] < \infty$ gilt insbsondere, daß der Index die Anzahl der Links(bzw. Rechts-)nebenklassen von G bezüglich U angibt (vgl 1.8.4).

b) Der Index $[G : U] = 2$ besagt, daß es genau zwei Linksnebenklassen und genau zwei Rechtsnebenklassen gibt. Sei $a \notin U$. Dann kann ich G als disjunkte Vereinigung $G = U \dot{\cup} aU$ bzw. $G = U \dot{\cup} Ua$ schreiben. Deswegen gilt $aU = Ua$. Für alle $a \in U$ gilt dies sowieso. Dies ist aber gerade die Normalteilerdefinition (vgl 1.7.16).

Lösung zur Aufgabe 17:

a) Die Inversionszahl (vgl. 1.10.1) ist $16 + 15 + \cdots + 1 = \frac{17 \cdot 16}{2} = 136$. Damit ist das Vorzeichen $(-1)^{136} = 1$, d.h. gerade.

b) Die Inversionen sind $I(\sigma) := \{(\sigma(i), \sigma(j)) | i < j \text{ und } \sigma(i) > \sigma(j)\} = \{(2,1), (3,1), (4,1), (5,1)\}$. Die Inversionszahl ist also $I(\sigma) = 4$ und das Vorzeichen ist $(-1)^{I(\sigma)} = 1$. Analog ergibt sich $I(\tau) = \{(5,4), (5,3), (5,2), (4,3), (4,2), (3,2)\}$, die Inversionszahl $I(\tau) = 6$ und das Vorzeichen $(-1)^6 = 1$.

c) Rechnen wir:

$12345 \vert \sigma$	$12345 \vert \tau$
$23451 \vert (15)$	$15432 \vert (23)$
$23415 \vert (14)$	$15423 \vert (24)$
$23145 \vert (13)$	$15243 \vert (25)$
$21345 \vert (12)$	$12543 \vert (34)$
$12345 \vert$	$12534 \vert (35)$
$\vert$	$12354 \vert (45)$
$\vert$	$12345 \vert$

Also ist die Anzahl der Nachbarschaftsinversionen für σ vier und für τ sechs. Es ergibt sich $(12)(13)(14)(15)\sigma = e$, also

$$\sigma = (15)(14)(13)(12),$$

da Transpositionen zu sich selbst invers sind. Analog ergibt sich

$$\tau = (23)(24)(25)(34)(35)(45).$$

d) Für σ braucht man immer vier Transpositionen, da alle fünf Zahlen vertauscht werden müssen und bei keiner Vertauschung eine andere Zahl an die richtige Stelle rückt.

Bei τ benötigt man hingegen nur zwei Transpositionen: $\tau = (25)(34)$.

e) D_5

f) Es gibt $(n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ Transpositionen.

Lösung zur Aufgabe 18:

a) Angenommen, φ sei ein Epimorphismus.
Wenden wir darauf den Homomorphisatz an, so erhalten wir das linke kommutative Diagramm. Da φ laut Annahme surjektiv ist, ist auch die Abbildung i surjektiv, also bijektiv und wir erhalten $\left(\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}\right)/\ker\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/21\mathbb{Z} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \\ {\scriptstyle s}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle i} \\ \left(\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}\right)/\ker\varphi & \xrightarrow{\cong} & \operatorname{Im}\varphi \end{array}$$

Dies bedeutet, da $\ker\varphi$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ ist, daß wir die Indexgleichung anwenden können und

$$21 = \left|\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}\right| = |\ker\varphi| \cdot \underbrace{\left[\mathbb{Z}/21\mathbb{Z} : \ker\varphi\right]}_{=6}$$

erhalten. Dies bedeutet $6|21$, was unmöglich ist. Widerspruch! Also ist φ nicht surjektiv.

Analog zeigt man dies für die umgekehrte (injektive) Richtung.

b) Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} : z \mapsto (z \mod 3)$ ist nicht injektiv ($\ker f = 3\mathbb{Z}$) und nicht surjektiv ($\operatorname{Im} f = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$).