Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

Musterlösung zur 4. Übung der Linearen Algebra I, WS 1998/99

Lösung zur Aufgabe 19:

a) Die Anwendung des euklidischen Algorithmus ergibt:

$$\begin{aligned} 301 &= 1\cdot 210+91 \\ 210 &= 2\cdot 91+28 \\ 91 &= 3\cdot 28+7 \\ 28 &= 4\cdot 7 \\ &\Rightarrow \operatorname{ggT}(301,210)=7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2701 &= (-1)\cdot(-1553)+1148 \\ -1553 &= (-2)\cdot 1148+743 \\ 1148 &= 1\cdot 743+405 \\ 743 &= 1\cdot 405+338 \\ 405 &= 1\cdot 338+67 \\ 338 &= 5\cdot 67+3 \\ 67 &= 22\cdot 3+1 \\ 3 &= 3\cdot 1+0 \\ &\Rightarrow \operatorname{ggT}(2701,-1553)=1 \end{aligned}$$

b) Nicht zwingend, denn es gilt $\operatorname{ggT}(301,210)=7$ **oder** $\operatorname{ggT}(301,210)=-7$!

c) Die einzelnen Schritte wurden schon in Teil a) ausgerechnet, so daß ich direkt die Brüche schreiben kann:

$$1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}} \qquad \text{und} \qquad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{3}}}}}}$$

d) Wenden wir den euklidischen Algorithmus auf a und b an, so erhalten wir eine Zerlegung

$$\frac{a}{b}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cdots}}$$

bis zu einem letzten Term $q_{k-1}+\frac{1}{q_k}$, da die letzte Zeile des euklidischen Algorithmus immer von der Form $n_k=q_k\cdot n_{k+1}+0$ ist. Die kleinsten Zahlen für die der euklidische Algorithmus k Schritte benötigt sind also diejenigen, für welche alle $q_i=1$ gilt, außer für q_k, da andernfalls $n_{k+1}=1\cdot n_k$ wäre, d.h. $q_k=2$.

Daß $\frac{F_{k+1}}{F_k}$ jene Form hat beweise ich jetzt durch vollständige Induktion:

$k=1: \frac{F_2}{F_1}=\frac{F_1+F_0}{F_1}=1+\frac{1}{\frac{F_1}{F_0}}$.

$k\to k+1: \frac{F_{k+2}}{F_{k+1}}=\frac{F_{k+1}+F_k}{F_{k+1}}=1+\frac{1}{\frac{F_{k+1}}{F_k}}$. $\square$

Lösung zur Aufgabe 20:

a) Die "Null" ist wegen $M\cup\emptyset=M$ die leere Menge, aber es gibt zu $\emptyset\neq M\in\mathcal{P}(X)$ keine Inverses M^{-1} mit $M\cup M^{-1}=\emptyset$. Folglich ist $(\mathcal{P}(X),\cup)$ keine additive Gruppe und damit ist $(\mathcal{P}(X),\cup,\cap)$ kein Ring.

b) Streng genommen muß ich jeweils die Wohldefiniertheit der Addition und der Multiplikation nachweisen, doch dies ist offensichtlich. Nach (2.1) der Vorlesung muß ich folgendes zeigen:
(1) $(\mathcal{P}(X),+)$ ist abelsche Gruppe
(2) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ (*Assoziativität der Multiplikation*)
(3) $A\cap(B+C)=A\cap B+A\cap C \quad \forall A,B,C\in\mathcal{P}(X)$ (*Distributivgesetz*)
(4) $A\cap B=B\cap A$ (*Kommutativität*)

(5) Es gibt ein Einselement bezüglich der 'Multiplikation' (unitär)
(6) $\min\{n \in \mathbb{N} | n \cdot 1 = 0\} = 2$ (Charakteristik)
zu (1): Ich zeige
(i) Die *Assoziativität* $A+(B+C) = (A+B)+C \,\forall\, A, B, C \in \mathcal{P}(X)$, was in [Dallmann & Elster, *Einführung in die höhere Mathematik II*] (1.13) steht und sehr aufwendig ist!! Jedenfalls besteht $A + (B + C)$ aus allen Elementen, die allen drei Mengen zugleich oder genau einer der drei Mengen angehört.
(ii) *Neutralelement*: $A + \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A$.
(iii) Jedes Element $A \in \mathcal{P}(X)$ ist zu sich selbst *invers*: $A + A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset$.
(iv) Die symmetrische Differenz ist *kommutativ*: $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B + A$
zu (2): $A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C$
zu (3): Dies ist einfach

$$\begin{aligned} A \cap (B + C) &= A \cap ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) \\ &= (A \cap (B \setminus C)) \cup (A \cap (C \setminus B)) \\ &= ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \setminus (A \cap B)) \\ &= (A \cap B) + (A \cap C) \end{aligned}$$

zu (4): Dies gilt ohnehin.
zu (5): Die Multiplikation ist '$\cap$' und das Neutralelement hierzu ist natürlich die gesamte Menge, also X.
zu (6): Wegen $2 \cdot 1 = X + X = (X \cup X) \setminus (X \cap X) = \emptyset$ ist die Charakteristik von $\mathcal{P}(X)$ gleich 2.

c) $2^{|X|}$ (*Beweis macht man in Analysis I*)

d) Für $|X| = 1$ besteht $\mathcal{P}(X)$ aus den Elementen $\emptyset$ und X. Die Verknüpfungstafeln sind

$+$	$\emptyset$	X
$\emptyset$	$\emptyset$	X
X	X	$\emptyset$

und

$\cap$	$\emptyset$	X
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
X	$\emptyset$	X

Lösung zur Aufgabe 21:

a) Die Definition eines Ideals in der Vorlesung erfolgte in 2.8.10 (*Nachlesen!*)
"$\Rightarrow$": (i): Laut Definition (1) ist $\mathfrak{a}$ eine Gruppe, enthält also das Neutralelement und ist somit nicht leer.
(ii): Da nach (1) $\mathfrak{a}$ eine Gruppe ist, ist $\mathfrak{a}$ abgeschlossen unter der Gruppenoperation, d.h. $a + b \in \mathfrak{a}$.
(iii): ist identisch zu (2).
"$\Leftarrow$": (2): ist identisch zu (iii)
(1): Es bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{a}$ eine Gruppe ist. Assoziativität $(a+b)+c = a+(b+c)$ ist klar, ebenso die Existenz des Neutralelements $0 \in R, a \in \mathfrak{a} \Rightarrow 0 \cdot a = 0 \in \mathfrak{a}$. Ein Inverses existiert wegen $a \in \mathfrak{a}, (-1) \in R \Rightarrow \mathfrak{a} \ni (-1)a = -(1a) = -a$. Daß $\mathfrak{a}$ abelsch ist folgt aus der Kommutativität von R.

b) (i): Das Neutralelement liegt wegen $0 = 0 + 0 \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ in der Summe.
(ii): Seien $c_1, c_2 \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Dann gibt es nach Voraussetzung $a_1, a_2 \in \mathfrak{a}$ und $b_1, b_2 \in \mathfrak{b}$ mit $c_1 = a_1 + b_1$ und $c_2 = a_2 + b_2$. Also gilt

$$c_1 + c_2 = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2).$$

Da $\mathfrak{a}$ ein Ideal ist, liegt $a_1 + a_2$ in $\mathfrak{a}$ und ebenso $b_1 + b_2$ in $\mathfrak{b}$. Also gilt $c_1 + c_2 \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.
(iii): Wir müssen noch die Abgeschlossenheit unter der Multiplikation zeigen. Seien $c \in \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ und $r \in R$ beliebig. Dann gibt es wieder $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in \mathfrak{b}$ mit $c = a + b$. Ferner gilt

$$r \cdot c = r(a + b) = r \cdot a + r \cdot b.$$

Aus der Idealeigenschaft folgt $r \cdot a \in \mathfrak{a}$ und $r \cdot b \in \mathfrak{b}$. Insbesondere gilt $r \cdot c \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.
Also ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ein Ideal.
Wenn $\mathfrak{v}$ ein Ideal von R ist, welches $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ umfaßt, dann muß $\mathfrak{v}$ alle Elemente $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in \mathfrak{b}$ enthalten. Da $\mathfrak{v}$ ein Ideal ist muß $\mathfrak{v}$ alle Summen $a + b$ mit $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in \mathfrak{b}$ enthalten. Insbesondere gilt $\mathfrak{v} \supset \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Also enthält jedes Ideal, welches $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ enthält auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Da $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ein Ideal ist, muß es das kleinste solche Ideal sein.

c) Da φ ein Homomorphismus ist gilt

$$\varphi(a) \cdot (\varphi(1_R) - 1_S) = \varphi(a) \cdot \varphi(1_R) - \varphi(a) \cdot 1_S = \varphi(a \cdot 1_R) - \varphi(a) = 0$$

Da $\varphi(a)$ kein Nullteiler ist, gilt $\varphi(1_R) - 1_S = 0$ und damit $\varphi(1_R) = 1_S$.

d) (i) Ja, aber nur wenn φ nicht trivial ist! (φ trivial $:\Longleftrightarrow \varphi(x) = 0 \,\forall\, x \in R$)
(ii) Ja, denn dann gehört das Einselement von S zum Bild von φ.