Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

Musterlösung zur 5. Übung der Linearen Algebra I, WS 1998/99

Lösung zur Aufgabe 23:

a) **Vorbemerkung:** Multipliziert man eine Gleichung G mit einem Element a in einem Ring R, so gilt $G = G' \Rightarrow a \cdot G = a \cdot G'$. Ist a eine Einheit, so gilt wegen $a \cdot G = a \cdot G' \Rightarrow \underbrace{a^{-1}aG}_{=G} = \underbrace{a^{-1}aG'}_{=G'}$ auch die Rückrichtigung.

(i) $\overline{2}x + \overline{7} = \overline{5} \iff \overline{2}x = \overline{5-7} \iff \overline{2}x = \overline{-2} \iff \overline{2}x = \overline{9}$. Wegen $\overline{2} \cdot \overline{6} = \overline{1}$ ist $\overline{6}$ eine Einheit und folglich gilt $\overline{2}x = \overline{9} \iff x = \overline{6 \cdot 9} = \overline{10}$.
Wie findet man aber das Inverse zu $\overline{2}$? Nun, man hat $11 = 5 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 1 = 11 + (-5) \cdot 2$. Unter dem Homomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ wird daraus $\varphi(11 + (-5) \cdot 2) = \varphi(11) + \varphi((-5) \cdot 2) \Rightarrow \overline{1} = \overline{(-5)} \cdot \overline{2} = \overline{6} \cdot \overline{2}$.

(ii) $\overline{2}x + \overline{7} = \overline{5} \iff \overline{2}x = \overline{10} \iff x \in \{\overline{5}, \overline{11}\}$
(*um dies zu sehen, macht man am einfachsten eine Tabelle wie im nächsten Fall*)

(iii) $\overline{2}x + \overline{3} = \overline{2} \iff \overline{2}x = \overline{3}$. Eine kleine Tabelle $\begin{array}{c|c|c|c|c} a & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \\ \hline 2a & \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} \end{array}$ offenbart, daß die Lösungsmenge leer ist.

b) Sei $\varphi_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ stets der kanonische Ringhomomorphismus

(i) Sei $a \in \mathbb{N}$ mit $a = \sum_{i \in k} a_i \cdot 10^i$ die gwöhnliche Darstellung einer Zahl im Dezimalsystem. Dann gilt

$$3|a \iff a \in 3\mathbb{Z} \iff \varphi_3(a) = \overline{0} \iff \varphi_3(\sum_{i \in k} a_i \cdot 10^i) = \overline{0} \iff \sum_{i \in k} \varphi_3(a_i) \cdot \varphi_3(10)^i = \overline{0}$$
$$\iff \sum_{i \in k} \overline{a_i} \cdot \overline{1}^i = \overline{0} \iff \sum_{i \in k} a_i \in 3\mathbb{Z} \iff 3 | \sum_{i \in k} a_i,$$

wobei die letzte Summe die Quersumme von a ist.

(ii) $2|a \iff \varphi_2(a) = \overline{0} \iff \sum_{i \in k} \overline{a_i} \cdot \overline{10}^i = \overline{0} \iff \overline{a_0} = \overline{0} \iff 2|a_0$
Analog geht es für 5 und 10.

(iii) $4|a \iff \varphi_4(a) = \overline{0} \iff \sum_{i \in k} \overline{a_i} \cdot \overline{10}^i = \overline{0} \iff \overline{2} \cdot \overline{a_1} + \overline{a_0} = \overline{0} \iff 2|(2a_1 + a_0)$

(iv) $11|a \iff \varphi_{11}(a) = \overline{0} \iff \sum_{i \in k} \overline{a_i} \cdot \overline{10}^i = \overline{0} \iff \sum_{i \in k} \overline{a_i} \cdot \overline{(-1)}^i = \overline{0} \iff 11 | \sum_{i \in k} (-1)^i a_i$.

Es gibt noch weitere Teilbarkeitsregeln, doch sind nicht alle so einfach (etwa für 7). Teilbarkeitsregeln mit nur endlich vielen Ziffern erhält man bei Teilbarkeitsregeln für Zahlen der Form $2^n 5^m$, da diese in einer Potenz von 10 enthalten sind; Beispiele sind 2 und 4, Gegebeispiel sind 3 und 11.

c) Die Zahl 106.590 ist trivialerweise durch 2, 5, 10 teilbar. Die Quersumme ist 21, was durch 3 teilbar ist, also ist die gesamte Zahl durch 3 teilbar. Die alternierende Quersumme ist -11, also ist die Zahl auch durch 11 teilbar.

Lösung zur Aufgabe 24:

Ich schreibe anstelle von $x_1e + x_2i + x_3j + x_4k = x \in \mathbb{H}$ nur kurz $(x_1, \cdots, x_4)$. Dies soll aber nicht andeuten, daß es sich hierbei um einen Vektor handelt!! Die Eigenschaft von $\mathbb{R}$, ein Körper zu sein, wird im Nachfolgenden immer wieder benutzt, auch wenn ich es nicht explizit erwähne.

a) Eigentlich müßte man zuerst die Abgeschlossenheit zeigen, doch das ist trivial. Es ist nach (2.1) und (2.4) zu zeigen: (1) $(\mathbb{H}, +)$ ist Gruppe
(2) Assoziativität: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
(3a) Distributivgesetz I: $\forall\, a, b, c \in \mathbb{H} : a(b + c) = ab + ac$
(3b) Distributivgesetz II: $\forall\, a, b, c \in \mathbb{H} : (b + c)a = ba + ca$
(4) Es gibt die Eins $\mathbf{1}_{\mathbb{H}}$

(1): Die Bedingung $\forall\, a, b, c \in \mathbb{H} : a + (b + c) = (a + b) + c$ ist klar.
Das *Nullelement* ist wegen $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \in \mathbb{R}$ in $\mathbb{H}$ enthalten.
Auch das *Inverse* ist wegen der Gruppeneigenschaft von $\mathbb{R}$ enthalten: Sei $x \in \mathbb{H}$. Dann ist das zu x inverse Element durch $y_l := -x_l$ für $l \in \{1, 2, 3, 4\}$ gegeben.

(2): Seien (i,j,k) ein geordnetes Tupel und x,y,z die Elemente i,j,k in beliebiger Reihenfolge. Die Relation $'x<y'$ soll bedeuten, daß $(x,y) \in \{(i,j),(jk),(k,i)\}$ gilt, d.h. wenn ich mir i,j,k als ein Dreieck vorstelle, daß ich in eine Richtung laufe. $x>y$ bedeutet, daß ich in die 'andere'Richtung laufe.

Dann ist $xy=z$, falls $x<y$ gilt, andernfalls gilt $xy=-z$ (*Nachrechnen!*). Ferner gilt $xy=-yx$ und $x^2=-1$. Mit Hilfe dieser Rechenregel kann ich die nachfolgenden Beweise einfacher aufschreiben und muß nicht alles einzeln nachrechnen.

Es bleibt für $x \neq y$ noch

$$(xy)z = x(yz) \quad (xy)y = x(yy) \quad (yx)y = y(xy) \quad (yy)x = y(yx) \quad (xx)x = x(xx)$$

zu zeigen. Fangen wir an:

$$(xy)z = \begin{cases} (z)z = -1, & \text{für } x<y \rightsquigarrow y<z \\ (-z)z = 1, & \text{für } x>y \rightsquigarrow y>z \end{cases} \quad \text{und} \quad x(yz) = \begin{cases} x(x) = -1, & \text{für } y<z \\ x(-x) = 1, & \text{für } y>z \end{cases} \quad \text{und so}$$

$$(xy)y = \begin{cases} (z)y = -x, & \text{für } x<y, z>y \text{ oder } x>y, z<y \\ (-z)y = -x, & \text{für } x>y, z>y \text{ oder } x<y, z<y \end{cases} \quad \text{und} \quad x(yy) = x(-1) = -x$$

weiter ....

(3a): Seien $a,b,c \in \mathbb{H}$. In meiner abgekürzten Notation ergibt sich

$$\begin{aligned} a(b+c) &= (a_1,a_2,a_3,a_4)\cdot((b_1,b_2,b_3,b_4)+(c_1,c_2,c_3,c_4)) \\ &= (a_1,a_2,a_3,a_4)\cdot(b_1+c_1,\cdots,b_4+c_4) \\ &= \big(a_1(b_1+c_1)-a_2(b_2+c_2)-a_3(b_3+c_3)-a_4(b_4+c_4), \\ &\quad a_1(b_2+c_2)+a_2(b_1+c_1)+a_3(b_4+c_4)-a_4(b_3+c_3), \\ &\quad a_1(b_3+c_3)-a_2(b_4+c_4)+a_3(b_1+c_1)+a_4(b_2+c_2), \\ &\quad a_1(b_4+c_4)+a_2(b_3+c_3)-a_3(b_2+c_2)+a_4(b_1+c_1)\big) \\ &= ab+ac \text{ nach Ausklammern und zerlegen.} \end{aligned}$$

(3b): analog

(4): Ersetzt man in (3a) den Ausdruck (b_1+c_1) durch 1 und die anderen (b_i+c_i) durch 0, so ergibt sich gerade a. Also ist die Eins in $\mathbb{H}$ von der Form $(1,0,0,0)$, liegt also insbeondere in $\mathbb{H}$.

b) Ein Automorphismus ist ein Isomorphismus einer Gruppe in sich selber, oder anders ausgedrückt: ein bijektiver Endomorphismus.

Ich muß also zeigen, daß die Abbildung $\varphi : (\mathbb{H},+) \to (\mathbb{H},+) : u \to \overline{u}$ ein bijektiver Homomorphismus ist.

(i) Die Abbildung ist *wohldefiniert*, da $\overline{u}$ für alle $u \in \mathbb{H}$ wieder in $\mathbb{H}$ liegt.

(ii) Wegen $\varphi(x+y) = (x_1+y_1)e-(x_2+y_2)i-(x_3+y_3)j-(x_4+y_4)k = (x_1,-x_2,-x_3,-x_4)+(y_1,-y_2,-y_3,-y_4) = \varphi(x)+\varphi(y)$ ist φ ein Homomorphismus.

(iii) $\ker\varphi = \{a \in \mathbb{H} | \varphi(a) = 0\} = \{a \in \mathbb{H} | (a_1,a_2,a_3,a_4) = 0\} = \mathbf{0}_{\mathbb{H}}$.

(iv) Die Abbildung ist offensichtlich surjektiv: Sei $b \in$ Im φ. Dann wird $\mathbb{H} \ni a := (b_1,-b_2,-b_3,-b_4)$ unter φ auf b abgebildet.

Lösung zur Aufgabe 25:

a) Es muß gezeigt werden, daß $\tilde{U} := \bigcap_{i\in I} U_i$ ein Untervektorraum von E ist. Wegen $0 \in U_i\ \forall i \in I$ ist der Schnitt nicht leer, d.h. $0 \in \tilde{U}$. Deswegen kann ich jetzt das Untervektorraumkriterium (4.4.1) verwende: Seien $x,y \in \tilde{U}$ und $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\forall i \in I : x,y \in U_i \Rightarrow \forall i \in I : \lambda x + \mu y \in U_i \Rightarrow \lambda x + \mu y \in \tilde{U}.$$

b) Da U und V Untervektorräume von E sind, enthalten sie 0, also liegt diese auch in der Summe: $0 \in U+V := \hat{U}$. Seien $x,y \in \hat{U}$ und $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in U+V &\rightsquigarrow x = u_x + v_x \quad \text{mit } u_x \in U, v_x \in V \\ y \in U+V &\rightsquigarrow y = u_y + v_y \quad \text{mit } u_y \in U, v_y \in V \end{aligned}$$

und $\lambda x + \mu y = \lambda u_x + \lambda v_x + \mu u_y + \mu v_y = \underbrace{\lambda u_x + \mu v_x}_{\in U} + \underbrace{\lambda u_y + \mu v_y}_{\in V} \in U+V$, so daß nach dem Unterraumkriterium $U+V$ ein Unterraum von E ist.

Lösung zur Aufgabe 26:

a) Eigentlich müßte man zuerst die Abgeschlossenheit zeigen, doch das ist trivial. Es ist nach (4.1) zu zeigen: (1) $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}, +)$ ist abelsche Gruppe
(2a) $\forall\, r, s \in \mathbb{K}\, \forall\, (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0} : (r \cdot s)(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} = r \cdot (s \cdot (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0})$
(2b) $\forall\, r, s \in \mathbb{K}\, \forall\, (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0} : \begin{cases} (r+s)(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} = r(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} + s(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \\ r((a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}_0}) = r(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} + r(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \end{cases}$
(2c) $\forall\, (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0} : 1 \cdot (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} = (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$

Der Nachweis ist stupides Nachgerechne!

(1): Ich muß die Gruppeneigenschaften überprüfen

(i) *Assoziativität*: Seien $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}_0}, (c_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$. Dann gilt $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} + ((b_i)_{i\in\mathbb{N}_0} + (c_i)_{i\in\mathbb{N}_0}) = (a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} + (b_i + c_i)_{i\in\mathbb{N}_0} = (a_i + b_i + c_i)_{i\in\mathbb{N}_0} = (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}_0} + (c_i)_{i\in\mathbb{N}_0} = ((a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}_0}) + (c_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$

(ii) *Nullelement*: Die Nullfolge $(a_i := 0)_{i\in\mathbb{N}_0}$ ist die Null bezüglich der Addition von Folgen

(iii) *Inverses:* Sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$. Dann gilt für $b_i := -a_i$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$, daß $(b_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ wegen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}_0} = (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}_0} = 0_{\mathbb{N}_0}$ das Inverse zur Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ ist.

(iv) Aus der Kommutativität des Körpers $\mathbb{K}$ folgt die Kommutativität der Gruppe.

(2a): Seien $r, s \in \mathbb{K}$ und $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$. Dann gilt $(r\cdot s)(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0} = ((rs)(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}) = (rs(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}) = (r(s(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0})) = r(sa_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$

(2b): Dies folgt ebenso wie (2a) aus den Rechenregeln des Körpers $\mathbb{K}$.

(2c): Folgt direkt aus der Skalarmultiplikation mit $r = 1$.

b) $\boldsymbol{U_1}$ ist kein Unterraum, denn $(1, 1, 1, \cdots) \in U_1$, aber $\frac{1}{2}(1, 1, 1, \cdots) \notin U_1$.
$\boldsymbol{U_2}$ ist kein Unterraum, denn $0 \in U_2$.
$\boldsymbol{U_3}$ ist ein Unterraum, denn (i) $0 \in U_3$ und (ii) Seien $(a_i), (b_i) \in U_3$ und $\lambda.\mu \in \mathbb{R}$. Dann ist $\lambda a_i + \mu b_i = 0$ für fast alle i und damit gilt $\lambda(a_i) + \mu(b_i) \in U_3$.
$\boldsymbol{U_4}$ ist kein Unterraum, denn $U_4 = \{(0, 76, \cdots)\} \not\ni 0$.
$\boldsymbol{U_5}$ ist ein Unterraum, denn: (i) $\forall\, i \in \mathbb{N}_0 : |0| \leq 1 \rightsquigarrow C := 1 \Rightarrow 0 \in U_3$ und (ii) Seien $\lambda.\mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (a_i) \in U_5 \quad &\Rightarrow \quad \exists\, C_a \forall\, i \in \mathbb{N}_0 : |a_i| \leq C_a \\ (b_i) \in U_5 \quad &\Rightarrow \quad \exists\, C_b \forall\, i \in \mathbb{N}_0 : |b_i| \leq C_b \end{aligned}$$

und $|\lambda a_i + \mu b_i| \leq |\lambda| \cdot |a_i| + |\mu| \cdot |b_i| \leq |\lambda| C_a + |\mu| C_b =: C \Rightarrow \lambda(a_i) + \mu(b_i) \in U_5$.
$\boldsymbol{U_6}$ ist ein Unterraum, denn (i) $0 \in U_6$ und (ii) Seien $(a_i), (b_i) \in U_3$ und $\lambda.\mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(\lambda a_i + \mu b_i) + (\lambda a_{i+1} + \mu b_{i+1}) = \lambda(a_i + a_{i+1}) + \mu(b_i + b_{i+1}) = \lambda a_{i+2} + \mu b_{i+2}$$

und $(\lambda a_i + \mu b_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ liegt in U_6.
$\boldsymbol{U_7}$ ist ein Unterraum, denn (i) $0 \in U_6$ und (ii) ist aus der Analysis bekannt: Für Nullfolgen gilt $\lim\limits_{i\to\infty} (\lambda a_i + \mu b_i) = 0$.

Lösung zur Aufgabe 27:

a) Der Testamentsvollstrecker fügt ein Kamel hinzu und teilt die 18 durch die geforderten Anteile. Der erste Sohn bekommt 9, der zweite 6 und der dritte 2 Kamele. Eines bleibt übrig und der Testamentsvollstrecker bekommt es zurück.

b) Die vier Zahlen müssen die Gleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{d}{d+1}$ erfüllen. Weitere Voraussetzungen sind:

(i) Die Verhältnisse müssen unterschiedliche Stammbrüche darstellen.
(ii) Der Testamentsvollstrecker muß genau ein Kamel hinzufügen können.
(iii) $d + 1$ muß ohne Rest durch a, b, c teilbar sein.

Rechnet man einige Beispiele durch, stellt man bald fest, daß $a = 2$ gelten muß, denn sobald a drei ist, wird die Summe der Brüche kleiner als eins. Analog erhält man für b die einzig möglichen Werte 3 und 4.

Insgesamt gibt es nur sieben Lösungen.

Lassen wir die erste Bedingung fallen, nach der jeder Bruch verschieden sein muß, bekommen wir fünf weiter Lösungen hinzu.

Diese Aufgabe stammt aus dem Buch DAS CHINESISCHE DREIECK *von Dominic Olivastro*