2.1

Kap. 2 Zahlen

2.1 Natürliche & ganze Zahlen

Intuitive Vorstellung der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3 \ldots\},$$

charakterisiert durch die Existenz einer Nachfolgeabbildung:

i.) 1 ist eine natürliche Zahl,

ii.) zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine nachfolgende natürliche Zahl $(n+1)$.

Bemerkung. Null ist hier keine natürliche Zahl,

$$\mathbb{N} \cup \{0\} =: \mathbb{N}_0 .$$

hat ihre besonderen Eigenschaft

Um Zahlen beliebig voneinander abzuziehen:

Gehe zu ganzen Zahlen über:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Was ist neu gegenüber $\mathbb{N}$?

$\mathbb{Z}$ hat die algebraische Struktur: — allgemein: Eine Menge G versehen mit einer Verknüpfung $\circ$

Was wird im Prinzip die Subtraktion erklärt

Definition 1. Die Menge $\mathbb{Z}$ versehen mit der Addition "+" $((\mathbb{Z},+))$ ist eine Gruppe, d.h.:

$g_1 \circ g_2 \in G$

i.) Die Addition von zwei ganzen Zahlen liefert wieder eine ganze Zahl (Abgeschlossenheit).

$e \in G$

ii.) Es gibt genau ein neutrales Element $0 \in \mathbb{Z}$, sodass für alle $z \in \mathbb{Z}$

$$0 + z = z + 0 = z.$$

$e \circ g = g \circ e = g \quad \forall g \in G$

iii.) Zu jedem $z \in \mathbb{Z}$ existiert genau ein inverses Element $-z \in \mathbb{Z}$ mit

$$z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

$\bar{g} \in G$

$g \circ \bar{g} = \bar{g} \circ g = e$

iv.) Für alle z_1, z_2, z_3 aus $\mathbb{Z}$ gilt das Assoziativgesetz

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

$g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$

Die Gruppe heißt zusätzlich kommutativ (Abelsch), da für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

$g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$

2.3

Weitere Beispiele für Gruppen.

Symmetrien in der Natur (→ Übungen).

Multiplikation. Bekannt. (Bemerkungen zur Division folgen).

Ordnungsrelationen

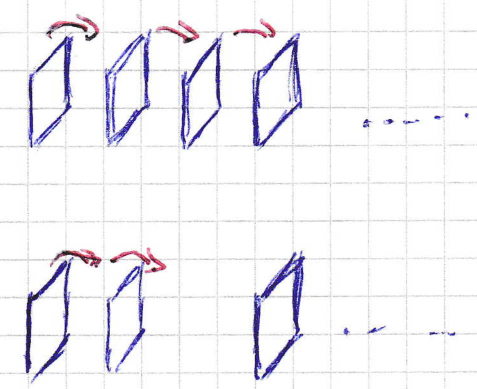
„$\geq$" , „$>$" , „$\leq$" , „$<$"

größer oder gleich — größer — kleiner oder gleich — kleiner

2.1.1 Vollständige Induktion.

Beweisprinzip, welches auf der Natur der natürlichen Zahlen beruht.

Bsp. Dominosteine.



Stößt man einen Stein an und stehen alle Steine im richtigen Abstand, so fallen nacheinander alle Steine um.

Steht ein Stein nicht im richtigen Abstand, so reißt die Kette ab.

(vollständige Induktion)

Satz 1. Es seien $A(n)$, $n \in \mathbb{N}$, Aussagen und es gelte

hier wird ein Stein angestoßen

i.) Induktionsanfang: Die Aussage $A(1)$ ist richtig.

Man kann auch mit $A(n_0)$ für ein beliebiges $n_0 \in \mathbb{N}$ anfangen.

ii.) Induktionsschluss:

$n \geq n_0$

Für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$ folgt aus der Induktionsannahme, dass $A(n)$ wahr ist,

Wenn n Steine gefallen sind

dass auch automatisch die Aussage $A(n+1)$ wahr ist.

hier wird der richtige Abstand überprüft

$n \geq n_0$

Dann sind alle Aussagen $A(n)$, $n \in \mathbb{N}$, wahr.

Beispiel. Behauptung: $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

$$A(n): \; 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis mit vollständiger Induktion.

Induktionsanfang. $A(1)$ ist offensichtlich wahr,

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Induktionsschluss ("$A(n) \Rightarrow A(n+1)$")

Man nehme an, dass $A(n)$ für ein beliebiges aber festes n wahr ist.

↑ Beachte den Unterschied zu "für alle" !

Zu zeigen: Unter dieser Annahme gilt auch $A(n+1)$.

Man sieht:

$$1+2+\dots+n+(n+1) = \underbrace{1+2+\dots+n}_{=\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1)$$

$= \frac{n(n+1)}{2}$ unter der Annahme $A(n)$ ist wahr

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Das ist aber genau die Aussage $A(n+1)$, die also aus $A(n)$ folgt.

2.1.2 Kombinatorik

Natürliche Zahlen $\leftrightarrow$ Abzählen

Kombinatorik: Lehre des Abzählens.

Vorbereitung:

Definition 2. Es seien $n, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq m \leq n$.

i.) Man bezeichnet als n-Fakultät das Produkt

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Setze $0! = 1$. ← Vereinbarung, die oft nützlich ist.

ii.) Die natürlichen Zahlen — als Bruch definiert, tatsächlich aber natürliche Zahl

$$\binom{n}{m} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!\, m!}$$

heißen Binomialkoeffizienten „n über m".

Setze $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{l}{m} = 0$ für $l < m$, $l \in \mathbb{N}$.

Rekursionsformel & Pascalsches Dreieck

Für $1 \leq m < n$ rechnet man direkt nach

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} = \binom{n+1}{m}$$

und konstruiert damit das Pascalsche Dreieck

Zeigt auch: Binomialkoeff $\in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccccccccc|l}
 & & & & 1 & & & & & n=0 \\
 & & & 1 & & 1 & & & & n=1 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & n=2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & n=3 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & n=4
\end{array}$$

$\binom{1}{0}$, $\binom{1}{1}$, $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$, $\binom{2}{2}$, $\binom{4}{0}$, $\binom{4}{4}$

$$\binom{4}{3} = \binom{3}{2} + \binom{3}{3}$$

$$* \quad \binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1}$$

Anwendung.

Satz 2 (Binomischer Lehrsatz) Beweis: Vollst. Ind.

Für alle Zahlen (auch Brüche, reelle, komplexe) und $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Beispiele. i.) $(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

Pascalsches Dreieck

ii.) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Permutationen.

Betr. geordnetes Tupel von k Zahlen:

$$(a_1, a_2, \dots, a_k)$$

Geordnet heißt: Es kommt auf die Reihenfolge an.

z.B. sind die 3-Tupel $(1,5,7)$ & $(1,7,5)$ nicht gleich.

Die Einträge $a_1 \dots a_k$ sollen nun aus den n-Zahlen $\{1, 2, \dots, n\}$ ausgewählt werden.

Fall 1: Wiederholungen sind nicht zulässig,

d.h. die ausgewählten Zahlen sind unterschiedlich, $k \leq n$,

Permutationen ohne Wiederholung.

(k-Permutation aus $\{1 \dots n\}$ ohne Wdh.)

Beispiel. Urnenmodell.

In einer Urne: n nummerierte, ansonsten gleiche Kugeln.

Es werden k - Kugeln gezogen, Nummern in der Ziehungsreihenfolge notiert, die Kugeln nicht in die Urne zurückgelegt. **Anzahl Möglichkeiten?**

Satz 3. Es gibt

$$\underbrace{n}_{\text{Auswahl 1ter Ziehung}}\underbrace{(n-1)}_{\text{2ter}}\underbrace{(n-2)}_{\text{3ter}}\cdots(n-k+1)$$

verschiedene Möglichkeiten.

Fall 2: Wiederholungen sind zulässig, **Permutationen mit Wiederholung.**

Im Urnenmodell werden die Kugeln nach dem Ziehen wieder zurückgelegt, können also mehrfach gezogen werden.

Satz 4. Dann gibt es

$$n^k \quad \text{jeweils } n$$

verschiedene Möglichkeiten.

Kombinationen.

Nun komme es nicht mehr auf die Reihenfolge an wie etwa bei den Lottozahlen. Fall 1. In diesem Beispiel (genau ein Urnenmodell) gibt es keine Wiederholung, die Situation ist repräsentiert durch eine k-elementige Teilmenge aus $\{1 \ldots n\}$, $k \leq n$.

Kombinationen ohne Wiederholung.

Satz 5. Es gibt in diesem Fall

$$\binom{n}{k}$$

vollst. I.d.

verschiedene Möglichkeiten.

$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$: 2 elem. Teilmenge aus $\{1,2,3\}$

Bsp. $n=3$, $k=2$: 2 elementige Teilmengen aus $\{1,2,3\}$

Fall 2.

Schließlich mit Zurücklegen: Kombinationen mit Wiederholung

Satz 6. Hier gibt es

$$\binom{n+k-1}{k}$$

verschiedene Möglichkeiten.

$\sim \{1,1\}, \{2,2\}, \{3,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$

$$\binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$$

2.2 Rationale Zahlen.

Zahlen sollte man auch dividieren können:

hier auch mit Vorzeichen

Die Menge der rationalen Zahlen (der Brüche) ist

"Brüche" und "Bruchzahlen" hier gleich

$$\mathbb{Q} := \left\{ q : q = \frac{m}{n} = m\,n^{-1},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Vorsicht: Äquivalenzrelation $\leadsto ad = bc \ldots$ $\leadsto$ Üby.

Was ist neu gegenüber $\mathbb{Z}$?

Brüche gleich: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$?

$\mathbb{Q}$ hat eine noch stärkere algebraische Struktur:

allgemein $(\mathbb{K}, +, \cdot)$

Definition 3. Die Menge $\mathbb{Q}$ versehen mit den zwei Verknüpfungen "+" und "·" ($(\mathbb{Q}, +, \cdot)$) ist ein Körper, d.h.

i.) $\mathbb{Q}$ ist bzgl. der Addition + eine kommutative Gruppe mit neutralem Element (bzgl +) 0 (Nullelement)

$\mathbb{K}$

man darf nicht durch 0 teilen!

$\mathbb{K}$

ii.) $\mathbb{Q} - \{0\}$ ist bzgl. der Multiplikation · eine kommutative Gruppe mit neutralem Element (bzgl. ·) 1 (Einselement),

Division wird eingeführt

d.h.

a) Die Multiplikation von zwei Zahlen aus $\mathbb{Q} - \{0\}$ liegt wieder in $\mathbb{Q} - \{0\}$ (Abgeschlossenheit bzgl. ·)

Erläuterung

b) Es gibt genau ein neutrales Element (bzgl. $\cdot$) $1 \in \mathbb{Q}-\{0\}$, sodass für alle $q \in \mathbb{Q}-\{0\}$:

$$1 \cdot q = q \cdot 1 = 1 .$$

c) Zu jedem $q \in \mathbb{Q}-\{0\}$ existiert genau ein inverses Element (bzgl. $\cdot$) $q^{-1} = \frac{1}{q} \in \mathbb{Q}-\{0\}$ mit

$$q\,q^{-1} = q^{-1} \cdot q = 1.$$

d.) Für alle q_1, q_2, q_3 aus $\mathbb{Q}-\{0\}$ gilt das Assoziativgesetz (bzgl. $\cdot$)

$$q_1 (q_2 \; q_3) = (q_1 \; q_2) q_3$$

Zudem gilt das Kommutativgesetz (bzgl. $\cdot$), d.h. für alle q_1, q_2 aus $\mathbb{Q}-\{0\}$ gilt

$$q_1 \cdot q_2 = q_2 \cdot q_1$$

iii.) Für alle q_1, q_2, q_3 aus $\mathbb{Q}$ gilt das Distributivgesetz

"Spielregeln" für "+" & "·"

[zwei Verknüpfungen, wie arbeiten die zusammen?

$$q_1 (q_2 + q_3) = \underbrace{q_1 q_2 + q_1 q_3}$$

Vereinbarung: Punkt- vor Strichrechnung

Zusammenhang mit Dezimalzahlen?

Es gilt zum Beispiel:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 \; ; \; \frac{1}{3} = 0.333\ldots = 0.\overline{3} \; ; \; \frac{1}{6} = 0.1\overline{6} \; ;$$

$$\frac{8}{7} = 1{,}\overline{142857} \, .$$

mit "00..." aufgefüllt

Umgekehrt: Jede abbrechende oder periodische Dezimalzahl ist eine rationale Zahl.

Vorsicht mit der Eindeutigkeit der Darstellung:

Es ist beispielsweise

geom. Reihe

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 = 0{,}4\overline{9} \quad ; \quad \frac{9}{20} = 0{,}45 = 0{,}44\overline{9} \, .$$

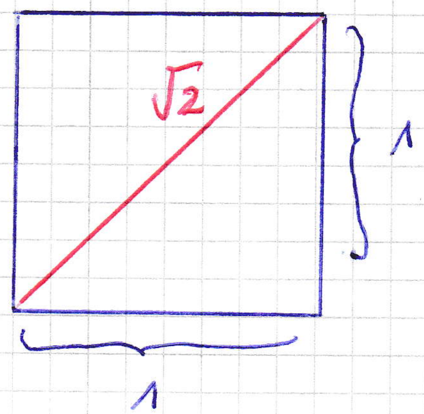
Charakterisierung von $\mathbb{Q}$ über Dezimalzahlen:

$$\mathbb{Q} = \{\text{nicht-abbrechend periodische Dezimalzahlen}\}.$$

schreibe z.B. $0{,}4\overline{9}$ statt $0{,}5$ – macht man in der Praxis natürlich nicht

2.3 Reelle Zahlen

Es fehlen z.B. noch Wurzeln:



Übungen: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Oder transzendente Zahlen

(keine Lösungen algebraischer Gleichungen) wie

z.B. $x^2 = 2$, s.o.

$$\pi = 3.14159 2653 \ldots$$

Charakterisiert als Dezimalzahlen setzt man für die reellen Zahlen

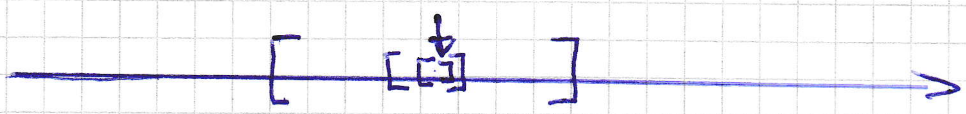
$$\mathbb{R} := \{\text{nicht-abbrechende Dezimalzahlen}\}.$$

Die Menge $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ heißt die Menge der irrationalen Zahlen.

Bemerkungen i.) Man stellt sich vor, dass mit den reellen Zahlen die Lücken im Zahlenstrahl aufgefüllt werden.

ii.) Etwas präziser heißt das:

Bei der Ineinanderschachtelung von immer kleiner werdenden Intervallen liegt immer eine reelle Zahl im Durchschnitt (Intervallschachtelungsprinzip)



iii.) Axiomatisch. Es gilt das Vollständigkeitsaxiom. (neu gegenüber $\mathbb{Q}$).

iv.) Vergleich mit der Anschauung: Die Menge „der Lücken" (der irrationalen Zahlen) ist viel viel größer als die Menge der Brüche.
Trotzdem kann man jeder irrationalen Zahl mit der Menge der Brüche beliebig nahe kommen.

2.4 Bekannte Notationen und Rechenregeln.

Intervalle

→ Kap. 3

In $\mathbb{R}$ sind wie oben auch „$<$", „$\leq$", „$>$", „$\geq$" definiert und man

2.16

($a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ fixiert)

offen

- $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,
- $(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$,
- $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$,
- $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, abgeschlossen
- $(a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$,
- $[a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
- $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
- $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

verallg. Intervalle

bekannt

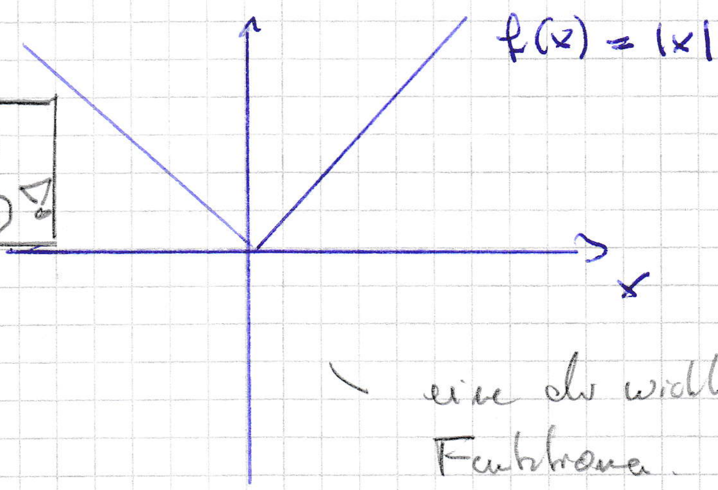
Betrag. Zu $x \in \mathbb{R}$ ist

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Im Zweifelsfall immer mit der formalen Def. arbeiten

Bsp.

$$|x-2| := \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ 2-x, & x < 2 \end{cases}$$



eine der wichtigsten Funktionen.

Der Betrag misst Längen & Abstände.

<u>Beispiel:</u> Der Abstand zwischen $a = 3$ und $b = -2$

ist $|a-b| = |3-(-2)| = |(-2)-3| = |b-a| = 5.$

Rechenregeln.

i.) $|x| \geq 0$; ii.) $|x| = 0 \iff x = 0$;

iii.) $|x \cdot y| = |x|\,|y|$

iv.) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)

→ wichtigste Ungleichung in der Analysis

v.) $\big|\,|x|-|y|\,\big| \leq |x-y|$ (umgekehrte Dreiecksungleichung)

Potenzen.

Es ist $a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots \cdot a}_{n-\text{mal}}$

$a^{-n} := \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdots \cdot \frac{1}{a}}_{n-\text{mal}}$

$a^{1/n} := \sqrt[n]{a}$, $a^0 := 1$, $0^0 := 1$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$(a^n)^m = a^{n m}$

bekannt

$(a \neq 0, b \neq 0)$.