6.1

Kap 6 Funktionen II: Einführung

Einen fließenden Übergang von linearen Gleichungssystemen zum Studium von Funktionen bietet:

6.1. Lineare Regression. → Übungsaufgaben

Man nehme an, eine (affin) lineare Gesetzmäßigkeit der Form

$$y = f(x) = a_1 + a_2 x$$

soll mit einem Experiment gefunden werden, d.h. die Parameter a_1, a_2 sind zu bestimmen.

Messfehler:
- Man macht in der Regel mehr als zwei Messungen: N Messungen.
- Für die einzelnen Messungen ist die Gleichung nicht exakt erfüllt.
- Minimiere den Fehler nach der Methode der kleinsten Quadrate.

z.B.

x_k	0	1	2	3
y_k	0	1	1	4/3

z.B. Zeitpunkte, an denen man misst

gemessene Werte

6.2

Als. Gleichungssystem

$$a_1 + a_2 x_k = y_k \qquad k = 1, \dots, 4$$

ges. a_1, a_2.

4 Gleichungen, 2 Unbekannte a_1, a_2

überbestimmt.

Matrixschreibweise:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{pmatrix}}_{M(N,2)} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{\substack{M(2,1) \\ \underline{a}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}}_{\substack{M(N,1) \\ \underline{y}}}$$

$A\underline{a} - \underline{y} = 0$ im Allgemeinen nicht lösbar, minimiere stattdessen den Fehler

$\| \underline{r} \|$ mit $\underline{r} = A\underline{a} - \underline{y}$ Residuum.

Euklidische Norm: Methode der kleinsten Quadrate.

Wichtige Operation mit Matrizen: Transposition.

Ist $A \in M(n,m)$, so entsteht die transponierte Matrix A^T, $A^T \in M(m,n)$, indem in A Zeilen und Spalten vertauscht werden:

$$A = (a_{ij})_{i=1\dots n}^{j=1\dots m}, \quad A^T = (a_{ji})_{j=1\dots m}^{i=1\dots n}$$

im Sinne von: aus erster Spalte wird erste Zeile etc.

Bsp. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(2,3)$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in M(3,2)$

6.3

Regel (Übung)

$A \in M(n,m)$, $B \in M(m,l)$

$$(A\,B)^T = \underbrace{B^T}_{M(l,m)}\,\underbrace{A^T}_{M(m,n)} \in M(l,n).$$

Es ist "recht leicht" zu beweisen: Die Parameter a_1, a_2, die nach der Methode der kleinsten Quadrate die "beste" Gerade durch die Daten bestimmen, errechnet man aus der **Normalgleichung**

$$\underbrace{A^T A}_{M(2,2)}\, \underbrace{\underline{a}}_{M(2,1)} = \underbrace{A^T}_{M(2,N)}\, \underbrace{\underline{y}}_{M(N,1)}$$

zeige A^TA regulär, eindeutige Lsg existiert

Zum obigen Beispiel.

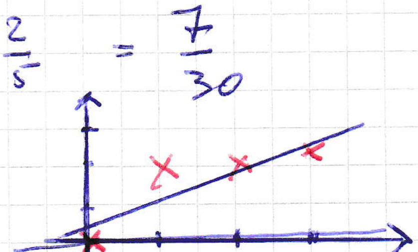
$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A^T \underline{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

löse: $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 10/3 \\ 6 & 14 & 7 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II} - \frac{3}{2}\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 10/3 \\ 0 & 5 & 2 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \quad a_2 = \frac{2}{5}, \quad a_1 = \frac{5}{6} - \frac{3}{2}\,\frac{2}{5} = \frac{7}{30}$

$f(x) = \frac{7}{30} + \frac{2}{5}x.$



6.4

Notation. (vgl. Kap. 1)

$\bar{x}$: arithmetisches Mittel

$$s_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{Varianz}$$

$$s_{xy} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad \text{Kovarianz}$$

In der Normalgleichung gilt:

$$A^T \underline{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & & x_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & x_2 \\ & \vdots \\ 1 & x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{pmatrix},$$

d.h. $A^T A \underline{a} = A^T \underline{y} \iff$

$$\left.\begin{aligned} N a_1 + a_2 \sum_{i=1}^{N} x_i &= \sum_{i=1}^{N} y_i \\ a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \end{aligned}\right\} \iff \boxed{\begin{aligned} &(1)\ a_1 + a_2 \bar{x} = \bar{y} \\ &(2)\ a_1 N \bar{x} + a_2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \end{aligned}}$$

(1) : $a_1 = \bar{y} - a_2 \bar{x}$ in (2) :

$$N \bar{y} \bar{x} - N a_2 \bar{x}^2 + a_2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \text{ , d.h.}$$

$$(3) \quad a_2 \left(\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right) - N \bar{x}^2 \right) = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i \right) - N \bar{x} \bar{y}$$

6.5

Berechne nun:

$$\frac{S_{xy}}{S_x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

z.B. $\sum_{i=1}^{N} y_i \bar{x} = \bar{x} \sum_{i=1}^{N} y_i = \bar{x} \cdot N \bar{y}$

$\sum_{i=1}^{N} \bar{x}\bar{y} = \bar{x}\bar{y} \sum_{i=1}^{N} 1 = N \bar{x}\bar{y}$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[x_i y_i - x_i \bar{y} - y_i \bar{x} + \bar{x}\bar{y}\right]}{\sum_{i=1}^{N}\left[x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2\right]}$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right) - N\bar{x}\bar{y} - N\bar{x}\bar{y} + N\bar{x}\bar{y}}{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - 2N\bar{x}\bar{x} + N\bar{x}^2}$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right) - N\bar{x}\bar{y}}{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - N\bar{x}^2}$$

Vergleich mit (3): $a_2 = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $a_1 = \bar{y} - \frac{S_{xy}}{S_x^2}\bar{x}$

und in obiger Notation

$$f(x) = a_1 + a_2 x = \frac{S_{xy}}{S_x^2}(x - \bar{x}) + \bar{y}$$

Im Beispiel oben: $\bar{x} = \frac{3}{2}$, $\bar{y} = \frac{5}{6}$

$S_{xy} = \frac{2}{3}$, $S_x^2 = \frac{5}{3}$, $\frac{S_{xy}}{S_x^2} = \frac{2}{5} = a_2$ ✓, $\frac{5}{6} - \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{7}{30} = a_1$ ✓

6.2 Funktionen: Definition und erste Eigenschaften

Sinn und Zweck: Beschreibung realer Vorgänge und Zustände in mathematischer Sprache.

Beispiel. Zeitliche Entwicklung (Bewegung) eines Teilchens:

Man kennt den Ort des Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit, m.a.W.:

Jedem Zeitpunkt t wird der Ort $\underline{x}(t)$ des Teilchens zugeordnet.

Definition 1.

Eine Funktion oder Abbildung f von einer Menge A in eine Menge B ordnet jedem Element aus A genau ein Element aus B zu.

Notation: $f: A \to B$, $y = f(x)$ oder $f: A \ni x \mapsto f(x) \in B$.

A: Definitionsbereich, B: Zielmenge, $y = f(x)$: Bildpunkt des Urbildpunktes x.

Bild ist zu unterscheiden von der Zielmenge

Bild von f: $f(A) := \text{bild}(f) = \{f(x) : x \in A\} \subset B$.

Sprechweise: x heißt **Argument** oder (unabhängige) **Variable**.

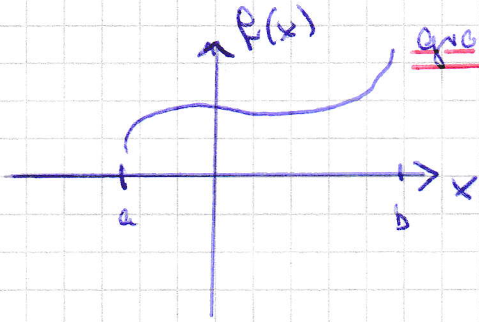
Man kann natürlich auch andere Symbole verwenden, z.B. t statt x für zeitabhängige Probleme.

Darstellungsformen:

Man zeichnet nicht die Funktion f sondern den Graphen

oder offene Intervalle...

i.)

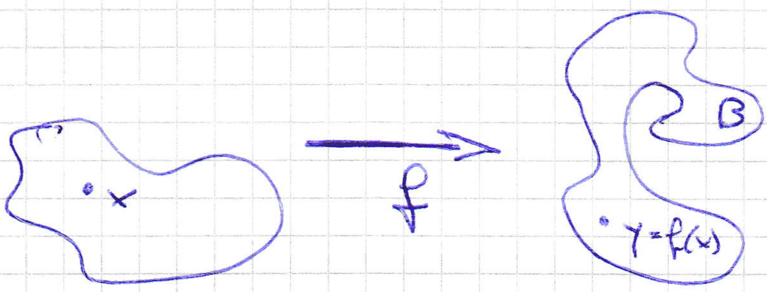


graph f $:= \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\} \subset [a,b] \times \mathbb{R}$

bild(f)

← eher statisch

ii.)



betont die Zuordnungseigenschaft

Charakteristische Eigenschaften.

Beispiele. i.) Temperaturverteilung in einem Raum.

Jedem Raumpunkt x wird eine Temperatur $T(x)$ zugeordnet.

ii.) Skatblatt mit 32 Karten, 3 Karten werden gezogen

$$A = \{1,2,3\} \qquad B = \{1,2,\dots,32\}$$

Eine konkrete Ziehung wird durch die Funktion f dargestellt

iii.) $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ mit $f(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ 1 & n \text{ gerade} \end{cases}$

iv.) Veranstaltung mit Platzkarten: Jeder Karte wird ein Platz zugeordnet und umgekehrt.

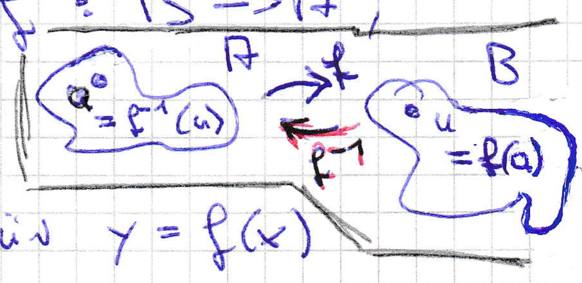
Welche der folgenden Eigenschaften ist in den Beispielen erfüllt?

Definition 2. Es seien A, B zwei Mengen und f eine Abbildung von A nach B. Dann heißt f

i.) injektiv, falls aus $x_1, x_2 \in A$ und $x_1 \neq x_2$ folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$.

ii.) surjektiv, falls $\text{Bild}\, f = B$, falls also jeder Punkt aus B ein Bildpunkt ist.

iii.) bijektiv, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist. Bijektive Funktionen haben eine Umkehrfunktion $f^{-1}: B \to A$, die über die Vorschrift



$$f^{-1}(y) = x \quad \text{für} \quad y = f(x)$$

definiert ist, d.h.

Def. Umkehrfunktion

$$f^{-1}(f(x)) = x \;\; \forall x \in A, \quad f(f^{-1}(y)) = y \;\; \forall y \in B.$$

Verkettung, s.u.

Beispiel Umkehrfunktion, falls $f: \mathbb{R} \supset I \to J \subset \mathbb{R}$.

bijektive Abb. zwischen zwei Intervallen (evtl. "∞")

- Idee: Löse für bijektives f die Gleichung $y = f(x)$ nach x auf,

  d.h. $x = \dots = f^{-1}(y)$

  und vertausche dann y und x.

- Bsp. $y = 2x+4 \Rightarrow x = \frac{y}{2} - 2$,

  bijektiv, warum?

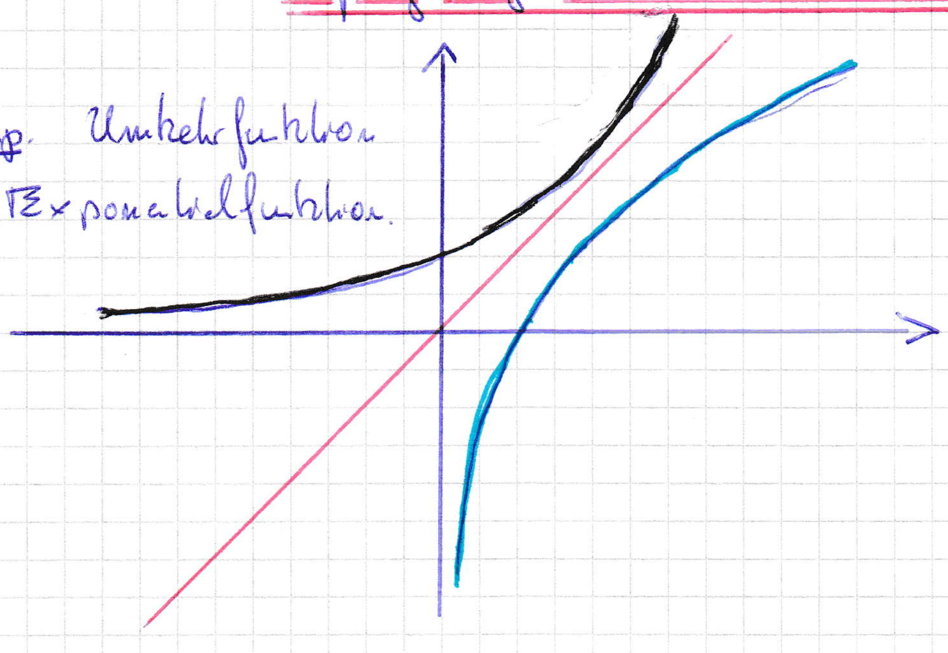
  d.h. nach Vertauschung: $y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 2.$

Probe. Berechne: $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+4)$ als Argument einsetzen

$$= \frac{(2x+4)}{2} - 2 = x. \checkmark$$

Geometrisch. Der Graph der Umkehrfunktion entsteht durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

Bsp. Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.



Verkettung von Abbildungen

(⇝ Komposition, Verknüpfung, Hintereinanderschaltung ...)

- Bedeutung bereits bei der Umkehrfunktion ersichtlich

<u>Weiteres Beispiel.</u> Rechenmaschine sei auf die Operationen

$x \overset{f}{\longmapsto} x^2$ und $y \overset{g}{\longmapsto} y+1$ programmiert.

Welche Operationen sind direkt durch Hintereinanderausführung möglich?

Weitere Bsp.: Prüfsumme

<u>Definition 3.</u> Bel. Mengen A, B, C und Abbildungen

$f: A \to B$, $g: B \to C$. Dann heißt

$$g \circ f : A \to C, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x)),$$

die Hintereinanderausführung oder Verkettung von f und g.

↳ oder Modellieren z.B. chemische Prozesse, die hintereinander ablaufen ...