Kapitel 8. Folgen, Reihen, Exponentialfunktion.

8.1 Folgen.

Beispiel. Gegeben sei ein Kapital $K_0 > 0$, ein Zinssatz $0 < p < 1$.

Nach einem Jahr erhält man bei

analog Wachstumsgesetze in der Natur

- jährlicher Verzinsung $K_0(1+p)$
- halbjährlicher Verzinsung $\underbrace{\left(\underbrace{K_0\left(1+\frac{p}{2}\right)}_{\text{nach } 1/2 \text{ Jahr}}\right)\left(1+\frac{p}{2}\right)}_{\text{nach } 1 \text{ Jahr}} = K_0\left(1+\frac{p}{2}\right)^2$.

nach $\frac{1}{2}$ Jahr Zinsen $p/2$, dann weiteres $1/2$ Jahr angelegt

- $\frac{1}{4}$ jährliche Verzinsung

$$K_0\left(1+p/4\right)^4$$

Übergang zum kontinuierlichen Fall:

Bez. zu $n \in \mathbb{N}$: $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Beobachtung: • $\{a_n\}$ ist monoton wachsend, d.h.

← Symbol für eine Folge, s.u.

$\forall n: a_n < a_{n+1}$ (halbjährliche Verzinsung besser als jährliche ...)

- $\{a_n\}$ ist beschränkt, d.h. $\exists K > 0$ mit $|a_n| \le K \;\forall n$ (sonst ginge die Bank pleite)

Idee: Dann werden sich die a_n einem Grenzwert

nähern, in diesem Beispiel der Eulerschen Zahl e.

$(e = 2{,}718\ldots)$

Präziser ist eine reelle Zahlenfolge

eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$,

a_n: n-tes Glied der Folge.

Notation auch verkürzend $\{a_n\}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, (a_n),

$a_1, a_2, a_3, \ldots$

die Eigenschaft „Abbildung" fehlt in der Notation

Beispiele. $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$, $\{n\}$,

$\{(-1)^n\}, \ldots$

Falls ein solcher existiert!

Idee zur Existenz eines Grenzwertes: Existiert ein

solcher Grenzwert a einer Folge $\{a_n\}$ und betrachtet

man eine beliebige (Vorstellung: beliebig kleine)

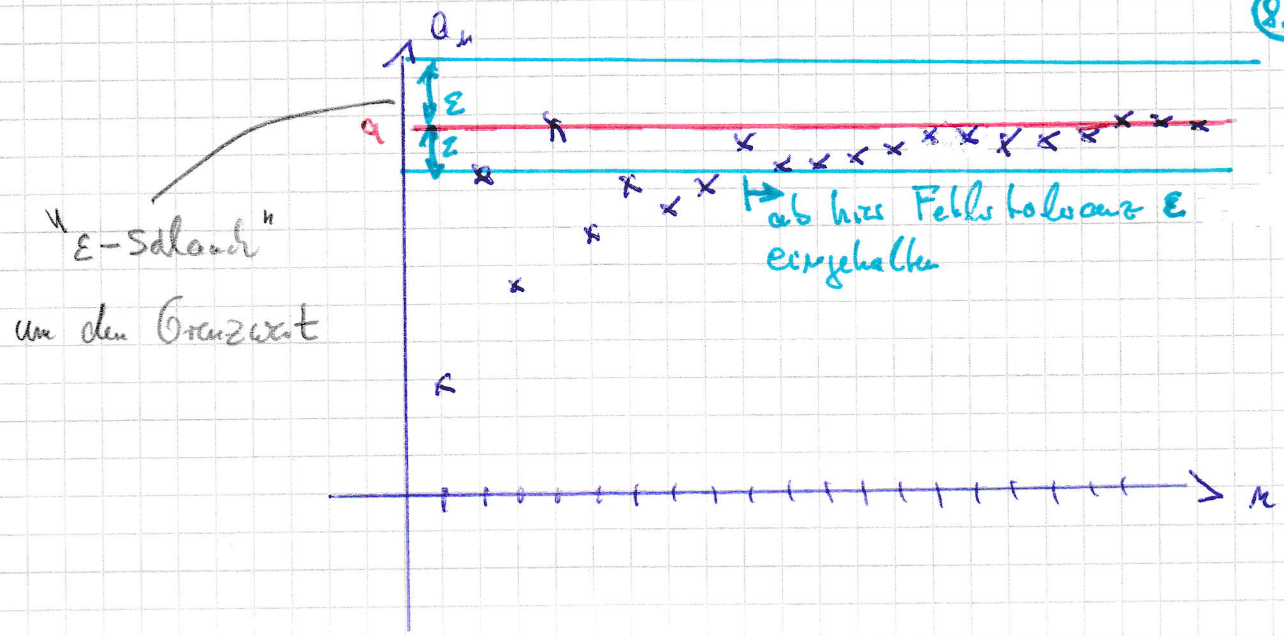
präziser die Folgenglieder

Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$, so liegt die Folge innerhalb

dieser Fehlertoleranz, sofern man nur weit genug

in der Folge vorangeschritten ist.

n groß genug ist.



Definition 1. Eine reelle Zahlenfolge $\{a_n\}$ heißt konvergent, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, sodass:

Zu jedem (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ existiert eine (meist von ε abhängende) Zahl $N = N(\varepsilon)$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N(\varepsilon).$$

Notation: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent.

Bem. Falls a existiert, ist es eindeutig bestimmt.

Es kann keine zwei verschiedene Grenzwerte geben.

Beispiele Anhand der Definition (hier ohne Beweis) zeigt man:

Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt Nullfolge

i.) $\{\frac{1}{n}\}$ konvergiert, Grenzwert 0 (Nullfolge)

ii.) $\{(-1)^n\}$ (alternierende Folge) divergiert.

Vorzeichen wechselt

"∞" als Grenzwert nicht definiert

iii.) $\{n\}$ divergiert $\xrightarrow{\text{vgl.}}$ Präsenzübg. 6

beachte: $\{n\}$ ist nicht beschränkt und man hat allgemein (zu zeigen genau wie im Bsp)

Satz 1 (Notwendige Konvergenzbedingung)

Jede konvergente reelle Zahlenfolge ist beschränkt.

Unbeschränkte Folge muss gar nicht erst auf Konvergenz untersucht werden

iv.) $\{\frac{1}{n^\alpha}\}$, $\alpha > 0$, konvergiert, Nullfolge

v) $\{n^\alpha\}$, $\alpha > 0$, divergiert.

vi.) $a > 0$ fix, $\{\sqrt[n]{a}\}$ konvergiert, Grenzwert 1

vii.) $\{\sqrt[n]{n}\}$ konvergiert, Grenzwert 1.

Satz 2 (Rechenregeln)

ohne diese Voraussetzung funktioniert der Satz nicht

i) Wenn alle hier genannten einzelnen Folgen konvergieren, dann konvergieren auch Summe ... mit den offensichtlichen Regeln (bei $\frac{a_n}{b_n}$ muss $b_n \neq 0$, G.W. $b \neq 0$ gelten).

gilt also $b = a$

ii.) Einschließungskriterium Gilt $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, $b_n \xrightarrow{n\to\infty} b = a$, sowie $a_n \leq c_n \leq b_n$ für eine weitere Folge $\{c_n\}$, so folgt $c_n \to a$ für $n \to \infty$.

Bsp. $a_n = \frac{1}{2n} \leq \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{c_n} \leq \frac{1}{n} = b_n$

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ konvergieren mit G.W. 0

$\Rightarrow c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Beispiele. i.) $c_n = \dfrac{3n^2 - 2n + 1}{2n^2 + 13n + 4}$ ← Vorsicht: G.W. des Nenners existiert nicht, Satz 2 kann nicht angewendet werden!

$$c_n = \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{13}{n} + \frac{4}{n^2}} =: \frac{a_n}{b_n}$$

beide G.W. exist.

Idee: Kürze so, dass der G.W. des Nenners existiert.

$c_n \to \frac{3}{2}$ für $n \to \infty$.

ii.) $c_n = \dfrac{5n^4 - 3n}{n^2 + 1} = \dfrac{5n^2 - \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} \geq \dfrac{n^2}{1 + \frac{1}{n^2}}$

$4n^2 - \frac{3}{n} \geq 0$

$\geq \dfrac{n^2}{2}$ unbeschränkt

$\{c_n\}$ divergiert.

iii.) $c_n = \dfrac{n^3 + n + 1}{n^4 + n^2 - 2} = \dfrac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}}{1 + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^4}}$

wird kein G.W.

$=: \dfrac{a_n}{b_n}$, $a_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$, $b_n \xrightarrow{n \to \infty} 1$

$c_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

8.2 Reihen

Ein wichtiger Spezialfall von Folgen entsteht durch die Summation von Folgegliedern:

Vorsicht: Eine Reihe ist keine unendliche Summe ⇝ die üblichen Regeln gelten i. A. nicht mehr

$$b_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$ für eine geg. Folge $\{a_k\}$.

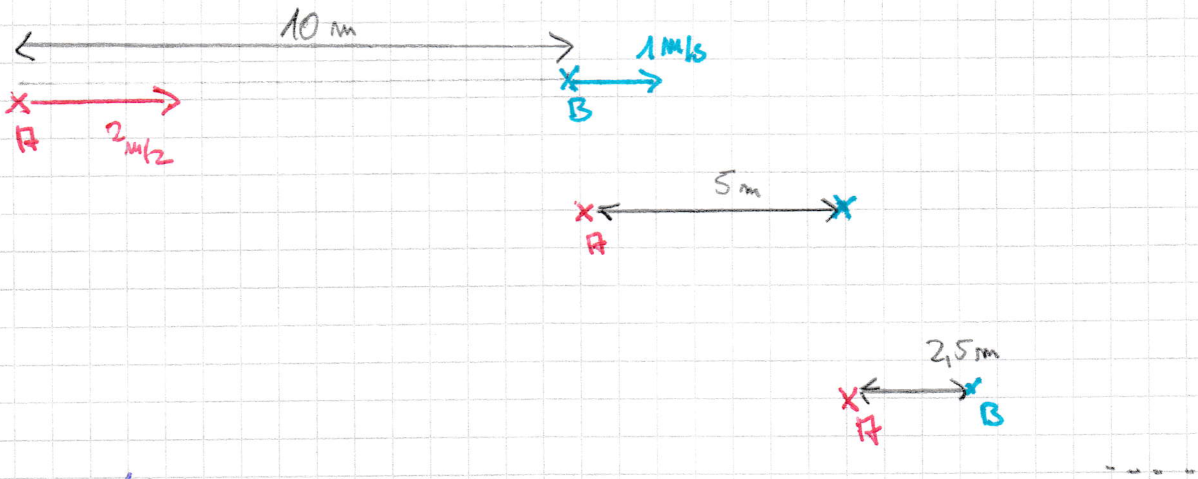
geg. $\{a_k\}$, es entsteht $\{b_n\}$

$\{b_n\}$ heißt **Folge der Partialsummen**.

Wichtiges Beispiel. (vgl. „Achilles und die Schildkröte" nach Zenon von Elea)

Eine Person A bewege sich mit einer Geschwindigkeit von $2\,m/s$.

In einer Entfernung von $10\,m$ vor sich sieht er B, der sich mit $1\,m/s$ nach vorne bewegt.



Physikalisch:

„Zeit = Weg / Geschwindigkeit". Ist T die Zeit des Überholvorgangs, so gilt

Strecke von A bis zum Überholpunkt

Strecke von B

$$T = \frac{S}{2\,m/s} = \frac{S - 10\,m}{1\,m/s}$$

$\Longleftrightarrow$ $S = 20\,m$ bis zum Überholvorgang.

Aber (Siehe Skizze)

Hat A die 10m Vorsprung von B zurückgelegt,
so ist B wieder 5 m weiter, hat A diese
zurückgelegt, so ist B wieder 2,5 m weiter...

A kann B niemals überholen?

Bedeutung erst als Grenzwert klar

Auflösung des Paradoxons: $10m + 5m + 2{,}5m + \dots$

$$= 10m\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right)$$

$$= 10m \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= 10m \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-1/2} = 20m \text{ s.o.}$$

vollst. Ind. Übungsblatt 2 Aufg. 3

Man beweise als Übungsaufgabe: $0.\overline{9} = 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 : \text{ Geometrische Reihe.}$$

Bem. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ divergiert für $|x| > 1$.

Begriff

Notation: Eine Folge von Partialsummen $\{b_n\}$ wie oben
heißt **Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (Symbol wird gleichzeitig für
den Grenzwert gebraucht, falls dieser exist.)

(*) Man nehme e
$\sqrt{\pi}$ mal mit sich selbst mal? ¿?

8.8

8.3 Exponentialfunktion

8.3.1 Definition und fundamentale Eigenschaften

Analog zur geometrischen Reihe definiert man $\forall x \in \mathbb{R}$ und zeigt die Konvergenz $\forall x \in \mathbb{R}$ von

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \text{ Exponentialfunktion.}$$

$$\operatorname{Exp}(x) \overset{\text{S.W.}}{\underset{=}{\overset{?}{=}}} e^x$$

in der Schule meist nicht wirklich definiert:

2^n ✓ bekannt, e^n Wieso?, $e^{\sqrt{\pi}}$ ¿? (*)

Beobachtung: i.) Mit "Schulkenntnissen" für die Ableitung und vertauscht man Differentiation und Reihendefinition (was sehr sorgfältig zu beweisen ist und im Falle von exp richtig ist, im Allgemeinen nicht), so ergibt sich heuristisch:

$$(\exp(x))' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)'$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Ableitung von x^0 verschwindet →

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$$

Umnummerierung

Anderungsrate: $\exp(x)' = \exp(x)$

ii.) Schlüssel zum Verständnis der Exponentialfunktion:

Satz 2 Funktionalgleichung von exp.

Zum Verständnis nötig: Cauchy-Produkt

Konsequenzen: siehe Übg.

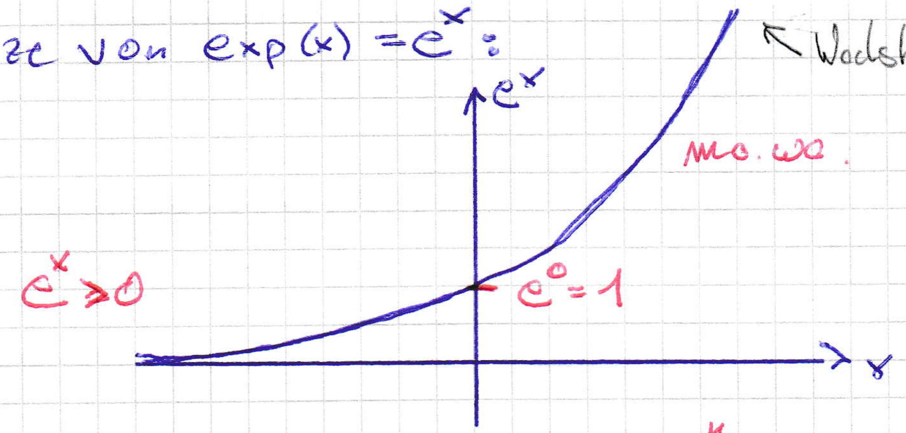
Für alle $x,y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

← Erinnerung Potenz

Skizze von $\exp(x) = e^x$:

Wachstum: siehe Übg



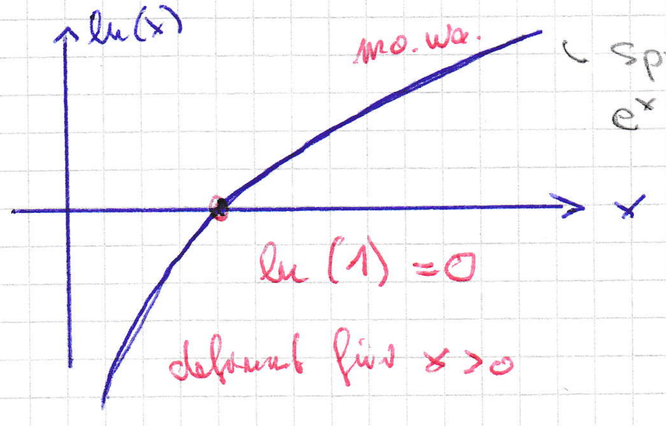
$e^n = \underbrace{e \cdots e}_{n\text{-mal}}$, falls $n \in \mathbb{N}$

8.3.2 Logarithmus und allgemeine Exponentialfunktion

$e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist bijektiv, $\exists$ Umkehrfunktion

$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, natürliche Logarithmus.

Also $y = \ln(x)$ bedeutet per definitionem $e^y = x$.



Spiegelung von e^x an der Winkelhalb.

Logarithmengesetze → Übg

Allgemeine Exponentialfunktion.

Fix $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. a^x?

$a(x) = 1 \ \forall x$

$a = 1$: $a^x \equiv 1$ wird im Folgenden nicht betrachtet.

nicht bijektiv

„Saubere" Definition: $a^x := \exp^{x \cdot \ln(a)}$

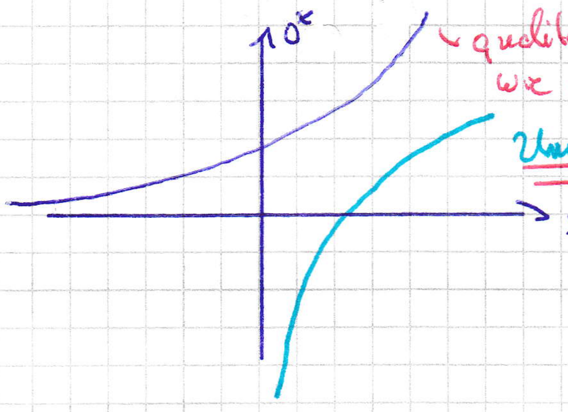
(Falls alle bekannten Gesetze vorausgesetzt wären und für a^x gelten würden:

$$a^x = \exp(\ln(a^x)) = \exp(x \ln(a)) \checkmark$$

Vorsicht: Das war noch nicht def

Das ist bereits def

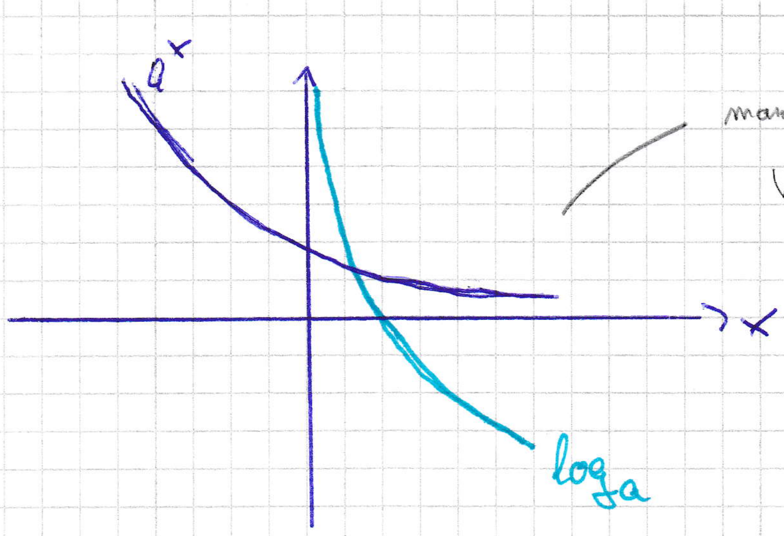
$a > 1$:



Umkehrfunktion: $\log_a(x)$

Logarithmus zur Basis a.

$0 < a < 1$:



man überlege z.B. das Verhalten von $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

8.4 Abschließende Bemerkungen

Die trigonometrischen Funktionen und die Hyperbelfunktion sind wie folgt als Reihe definiert:

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3} x^3 + \ldots$$

$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \ldots$$

$$\sinh(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cosh(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$$

Der tiefe Zusammenhang mit der Exponentialfunktion wird deutlich, wenn man in $\mathbb{C}$ rechnet (Eulersche Formel).