

21.01.2020

Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I
Bachelor plus MINT Präsenzübung, Blatt 19

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für alle $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ gelten.

- i)* $\langle \underline{x} + \underline{y}, \underline{x} - \underline{y} \rangle = \|\underline{x}\|^2 - \|\underline{y}\|^2$.
 - ii)* $\|\underline{x} - \underline{y}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 - 2\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \|\underline{y}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 - 2\|\underline{x}\|\|\underline{y}\|\cos(\underline{x}, \underline{y}) + \|\underline{y}\|^2$
(Verallgemeinerter Satz des Pythagoras bzw. verallgemeinerter Cosinussatz).
 - iii)* $\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 - \|\underline{x} - \underline{y}\|^2 = 4\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$.
 - iv)* $\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 + \|\underline{x} - \underline{y}\|^2 = 2\|\underline{x}\|^2 + 2\|\underline{y}\|^2$
(Parallelogramm-Gleichung).
-

Aufgabe 2. Betrachten Sie die Menge $V = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$ aller reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$.

- i)* Zeigen Sie, dass V mit den üblichen Verknüpfungen der Addition zweier Funktionen und der Multiplikation mit einem Skalar ein Vektorraum ist.
- ii)* Es sei $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für paarweise verschiedene Zahlen $s_1, \dots, s_m \in [0, 1]$ die Funktionen
$$f_j(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x = s_j, \\ 0, & \text{sonst;} \end{cases} \quad j = 1, \dots, m$$
linear unabhängig sind.
- iii)* Was kann man über die Dimension des Vektorraumes V aussagen?
- iv)* Ist durch $\langle f, g \rangle := f(0)g(0)$ ein Skalarprodukt auf V definiert?

Aufgabe 3.

- i)* Liegen die Punkte $(3, 0, 4)$, $(1, 1, 1)$ und $(-1, 2, -2)$ auf einer Geraden?
- ii)* Es seien $A = (0, 1, 0)$, $B = (4, 4, 0)$ und $C = (0, 1, 5)$.
 - (a) Bestimmen Sie alle Innenwinkel im Dreieck $\triangle ABC$.
 - (b) Bestimmen Sie die längste Seite des Dreiecks $\triangle ABC$ und berechnen Sie seinen Flächeninhalt.