Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

22.01.2020

Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I
Bachelor plus MINT Präsenzübung, Blatt 20

Aufgabe 1. Es sei

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \big\{p(x) = ax^2 + bx + c \colon a, b, c \in \mathbb{R}\big\}.$$

der Vektorraum aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 in einer Variablen x mit reellen Koeffizienten.

i) Zeigen Sie, dass durch

$$\|p(x)\|_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

eine Norm auf $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ gegeben ist.

ii) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle ax^2 + bx + c, \tilde{a}x^2 + \tilde{b}x + \tilde{c}\rangle_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} := a\tilde{a} + b\tilde{b} + c\tilde{c}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ gegeben ist.

iii) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Polynomen $p(x) = x - 1$ und $q(x) = x^2 - 2x + 1$.

iv) Zeigen Sie, dass die Polynome 1, x und x^2 eine Orthonormalbasis von $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ bilden.

v) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement des Unterraumes

$$U := \text{Spann}\left(2x^2 - 5x + 1, 3x - 3\right).$$

von $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Aufgabe 2.

i) Es seien $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n - \{\underline{\mathbf{0}}\}$ mit $\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}\rangle = 0$. Zeigen Sie, dass $\underline{\mathbf{x}}$ und $\underline{\mathbf{y}}$ linear unabhängig sind.

ii) Es seien

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)})$ von Spann$(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)})$.

Bitte wenden.

iii) Ergänzen Sie $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)})$ zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, d.h. finden Sie $\underline{\mathbf{f}}^{(3)} \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, dass $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)}, \underline{\mathbf{f}}^{(3)})$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 3. Es seien

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Orthonormalbasis $(\underline{\mathbf{w}}^{(1)}, \underline{\mathbf{w}}^{(2)}, \underline{\mathbf{w}}^{(3)}, \underline{\mathbf{w}}^{(4)})$ von $\mathbb{R}^4$ mit der Eigenschaft

$$\operatorname{Spann}(\underline{\mathbf{w}}^{(1)}, \underline{\mathbf{w}}^{(2)}, \underline{\mathbf{w}}^{(3)}) = \operatorname{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)}).$$