Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

12.11.2019

Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I
Bachelor plus MINT Präsenzübung, Blatt 3

Aufgabe 1.

i) Zeigen Sie, dass die Menge

$$G = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon f \text{ bijektiv}\}$$

aller bijektiven Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ versehen mit der Verkettung

$$\circ\colon G \times G \to G, \quad (f, g) \mapsto f \circ g$$

als Verknüpfung eine Gruppe ist. Ist $(G, \circ)$ Abelsch?

ii) Es sei $M = \{0, 1\}$ die Menge der möglichen Reste bei Division durch 2. Für eine ganze Zahl a schreiben wir

$$a = 0 \mod 2 \quad \text{bzw.} \quad a = 1 \mod 2$$

falls a gerade bzw. ungerade ist. Nun definieren wir eine Addition $+_2$ und eine Multiplikation $*_2$ auf M durch

$$+_2\colon M \times M \to M, \quad (a, b) \mapsto (a + b) \mod 2,$$
$$*_2\colon M \times M \to M, \quad (a, b) \mapsto ab \mod 2.$$

Bestimmen Sie die Verknüpfungstabellen für $(M, +_2)$ und $(M, *_2)$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

i) $n! \geq 2^n$ für alle $n \geq 4$.

ii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \binom{k}{2} = \binom{n}{3}$ für alle $n \geq 3$.

iii) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k - 1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Hinweis: es gilt $2ab \leq a^2 + b^2$ für alle $a, b \geq 0$).

v) Es sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $k^n - 1$ durch $(k - 1)$ teilbar.