Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

27.11.2019

Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I
Bachelor plus MINT Präsenzübung, Blatt 8

Aufgabe 1. Gegeben seien die durch

$$f(x) = 4e^x - 1 \quad \text{bzw.} \quad g(x) = 9 - e^x$$

definierten Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

i) Ermitteln Sie die Wertebereiche und die Nullstellen der beiden Funktionen.

ii) Stellen Sie die Graphen der beiden Funktionen in einer gemeinsamen Skizze dar.

iii) Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt der beiden Graphen.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Identität

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}$$

für alle $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ gilt und folgern Sie, dass

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3.

i) Skizzieren Sie die Graphen der Funktion $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und der zugehörigen inversen Funktion $\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

[Hinweis: Skizzieren Sie zunächst die Graphen der Funktionen $x \mapsto e^x/2$ und $x \mapsto e^{-x}/2$ und untersuchen Sie anschließend das Verhalten von $\sinh(x)$ für große (kleine) Werte von x.]

ii) Zeigen Sie, dass

$$4\sinh^3(y) + 3\sinh(y) - \sinh(3y) = 0$$

für alle $y \in \mathbb{R}$.

[Hinweis: Benutzen Sie die Formel $\sinh(y_1 + y_2) = \sinh(y_1)\cosh(y_2) + \cosh(y_1)\sinh(y_2)$, um $\sinh(3y)$ zu berechnen.]

Bitte wenden.

iii) Folgern Sie, dass die Zahl

$$\sinh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arsinh}(2)\right)$$

eine Lösung der Gleichung

$$4x^3 + 3x - 2 = 0$$

ist.

iv) Folgern Sie, dass

$$\sinh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arsinh}(2)\right) = \frac{1}{2}.$$

[Hinweis: Berechnen Sie $(4x^3 + 3x - 2) : (x - \frac{1}{2})$.]