Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

04.12.2019

Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

Bachelor plus MINT Präsenzübung, Blatt 10

Aufgabe 1.

i) Es seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente reelle Zahlenfolgen mit $c_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} c_n \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Folgen $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{1/c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent sind mit

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} c_n}.$$

ii) Zeigen Sie, dass der Grenzwert einer konvergenten reellen Zahlenfolge eindeutig ist, d.h. zeigen Sie: ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Zahlenfolge mit $a_n \to a$ und $a_n \to b$ für $n \to \infty$, so gilt $a = b$.

iii) Es seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sind $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so ist die Folge $\{a_nb_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(b) Sind $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beide divergent, so ist die Folge $\{a_nb_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(c) Sind $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist die Folge $\{a_n+b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(d) Sind $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist die Folge $\{a_nb_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Aufgabe 2.

i) Es sei $\alpha > 1$. Folgern Sie aus

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

dass

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

Bitte wenden.

ii) Zeigen Sie mit Hilfe von Definition 8.2, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{3n^2+1} = \frac{1}{3}.$$

iii) Finden Sie eine divergente reelle Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, dass die Folge $\{\sin(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

iv) Finden Sie eine konvergente reelle Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, dass die Folge $\{\sin(1/a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.