

11.12.2019

Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I
Bachelor plus MINT Präsenzübung, Blatt 12

Aufgabe 1.

i) Es seien $a > 0$ und $x_1 > \sqrt{a}$. Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad n \geq 2,$$

konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

ii) (a) Es sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die rekursiv definierte Folge

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Finden und beweisen Sie eine geschlossene Formel für a_n ($n \in \mathbb{N}$) (das heißt eine Bildungsvorschrift für a_n , die nur von n abhängt) und zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

[Hinweis: Es gilt $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für alle $q \neq 1$.]

(b) Wie ändert sich der Grenzwert für einen beliebigen Startwert $a_0 \neq 0$?

Aufgabe 2.

i) Es sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Zahlenfolge mit Grenzwert a . Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

ii) Bestimmen Sie

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n(n+5)}{n}$$

und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n}{n+8}.$$

iii) Finden Sie eine beschränkte Folge mit den drei Häufungspunkten -1 , 0 und 1 . Finden Sie eine unbeschränkte Folge mit diesen drei Häufungspunkten. Gibt es eine monotone Folge mit diesen drei Häufungspunkten? Handelt es sich bei Ihren Beispielen um Cauchy-Folgen?