Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

17.12.2019

Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I
Bachelor plus MINT Präsenzübung, Blatt 13

Aufgabe 1.

i) Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0.$$

ii) Beweisen Sie den *Satz von der monotonen Folge für Reihen* (Satz 8.8): Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist genau dann konvergent, wenn die zugehörige Folge der Partialsummen beschränkt ist, d.h. wenn es $K > 0$ gibt mit

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq K$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

iii) Es seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Folgern Sie aus *ii)*, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ absolut konvergiert.

Aufgabe 2.

i) Es sei

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$s_n = \frac{1-(\frac{1}{4})^n}{3}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Konvergiert die Folge $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$? Falls ja, bestimmen Sie den Grenzwert.

Bitte wenden.

ii) (a) Es sei $m \in \mathbb{N} - \{1\}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=2}^{\infty} m^{-n} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}.$$

[Hinweis: geometrische Reihe.]

(b) Folgern Sie, dass

$$\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} m^{-n} = 1.$$

Aufgabe 3. Prüfen Sie, für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ die folgenden Reihen konvergieren.

$$i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(1+a)^n} \qquad ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)^n} \qquad iii) \sum_{n=0}^{\infty} 2^{an}$$

Aufgabe 4. Betrachten Sie die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}.$$

i) Konvergiert die Reihe?

ii) Konvergiert die Reihe absolut?

iii) Konvergiert die Umordnung

$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\
+ & \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{6} \\
+ & \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) - \frac{1}{8} \\
+ & \qquad \cdots \\
+ & \left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}-1}\right) - \frac{1}{2n+2} \\
+ & \qquad \cdots
\end{aligned}$$

der obigen Reihe?

iv) Zeigen Sie, dass die Umordnung

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \ldots$$

der obigen Reihe konvergiert.