Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

18.12.2019

Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I
Bachelor plus MINT Präsenzübung, Blatt 14

Aufgabe 1. Es seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen. Beweisen oder wiederlegen Sie die folgenden Aussagen.

i) Ist $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ii) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

iii) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ absolut.

Aufgabe 2. Konvergieren die folgenden Reihen?

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin^3(n+1)}{2^n+n^2}$

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+3)}}$

v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

vi) $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)^2$

vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$

viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^{n+1}}$

Aufgabe 3.

i) Zeigen Sie, dass

$$\frac{6}{n(n+3)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+3}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

ii) Folgern Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n(n+3)} = \frac{11}{3}.$$